VIBRAÇÕES MECÂNICAS

CONTEÚDO

1. Introdução
2. Pequenas oscilações em torno de uma posição de equilíbrio

Sistemas discretos:

3. Sistemas com um grau de liberdade
4. Sistemas com n graus de liberdade

- modos normais de vibração
- freqüências naturais
- análise modal

CONTEÚDO

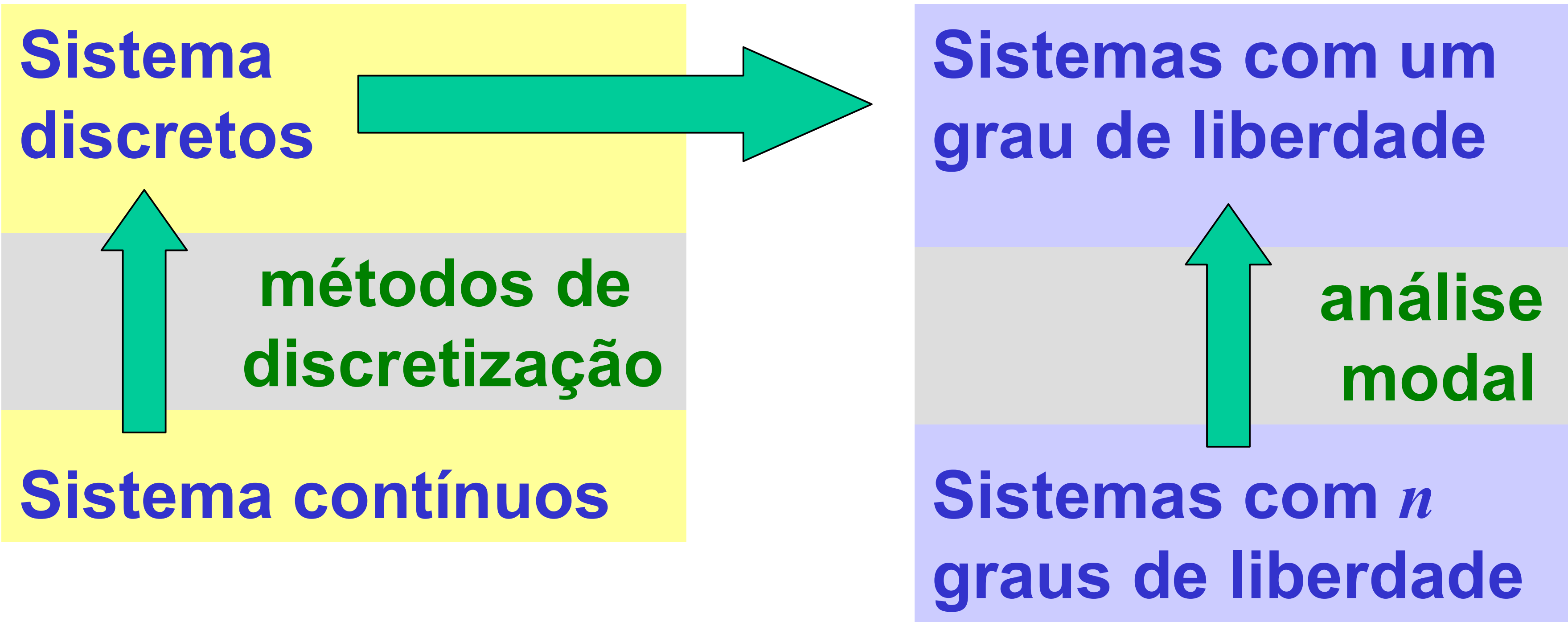
Sistemas contínuos:

5. **Modelagem pelo método dos elementos finitos**

6. **Análise de vibração pelo método dos elementos finitos**

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS

(quanto ao número de graus de liberdade)



CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS

(quanto a linearidade)

sistema linear → vale princípio de superposição

sistema não linear →

- grandes deformações
- movimento de corpo rígido
- equação constitutiva

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS

(quanto ao tipo de excitação)

excitação determinística

- transiente
- periódica

- harmônica
- periódica
- periódica complexa

excitação aleatória

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS

(técnicas de solução)

- sistemas lineares →
  - uso de superposição
  - soluções analíticas
  - métodos numéricos

- sistemas não lineares →
  - métodos numéricos
  - métodos de perturbação

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS

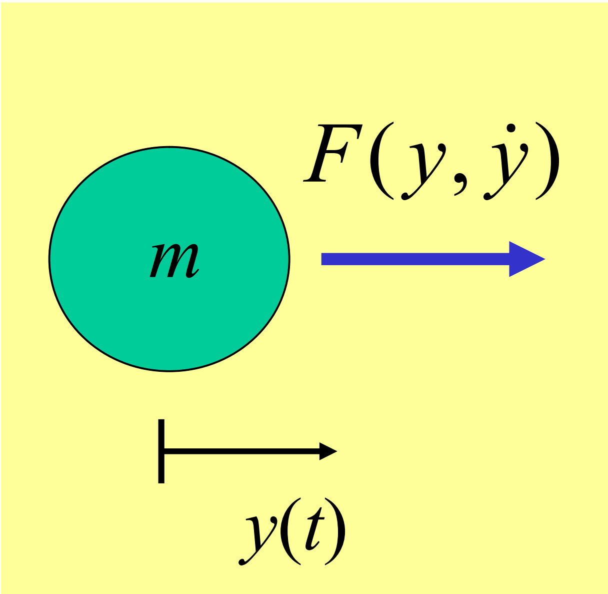
(técnicas de solução – sistemas lineares)

• problemas transientes →
- transformada de Laplace
- método numérico

• problemas periódicos →
- transformada de Fourier
- método numérico

(estado estacionário)

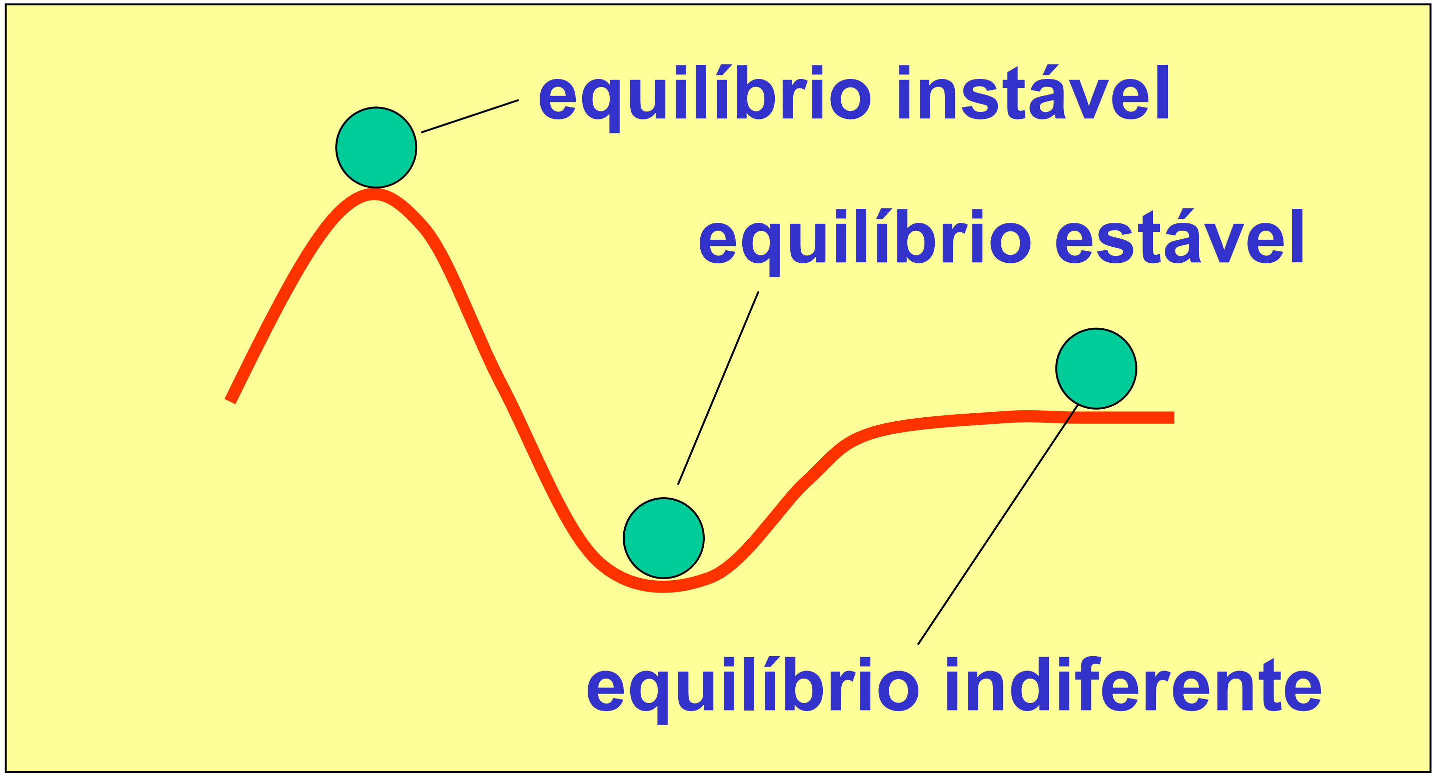
PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO



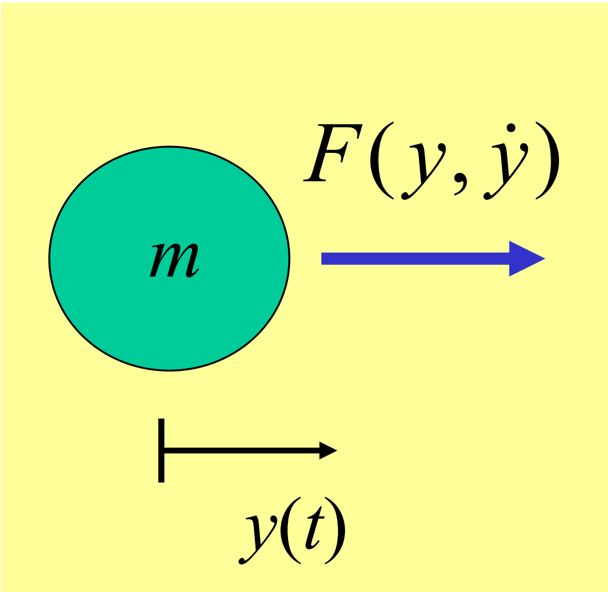
As forças externas dependem somente da velocidade e da posição da partícula

$$m\ddot{y}(t) = F(y,\dot{y})$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO



PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO



Cálculo da posição de equilíbrio:

$$m\ddot{y}(t) = F(y,\dot{y})$$

$$F(y_e,0) = 0$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

LINEARIZAÇÃO

Expansão em torno de um ponto de equilíbrio:

$$m\ddot{y}(t) = F(y,\dot{y}) =$$

$$= F(y_{e,}0) + \left.\frac{\partial F(y,\dot{y})}{\partial y}\right|_e (y - y_e) + \left.\frac{\partial F(y,\dot{y})}{\partial \dot{y}}\right|_e \dot{y} + O(y,\dot{y})$$

$$F(y_e, 0) = 0$$

$$k = -\left.\frac{\partial F(y,\dot{y})}{\partial y}\right|_e$$

$$c = -\left.\frac{\partial F(y,\dot{y})}{\partial \dot{y}}\right|_e$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Expansão em torno de um ponto de equilíbrio:

$$m\ddot{y}(t) = F(y, \dot{y}) \cong -k\,(y - y_e) - c\,\dot{y}$$

Equação Linearizada:

$$m\ddot{y}(t) + c\,\dot{y} + k\,(y - y_e) = 0$$

$$x(t) = y(t) - y_e \;\Rightarrow\; m\ddot{x}(t) + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Estabilidade : $$m\ddot{x}(t)+c\,\dot{x}(t)+k\,x(t)=0$$

$c>0$ e $k>0$ ⇒ **Equilíbrio assintot. estável**

$c=0$ e $k>0$ ⇒ **Equilíbrio estável**

$c<0$ ou

$c=0$ e $k<0$ ⇒ **Equilíbrio instável**

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

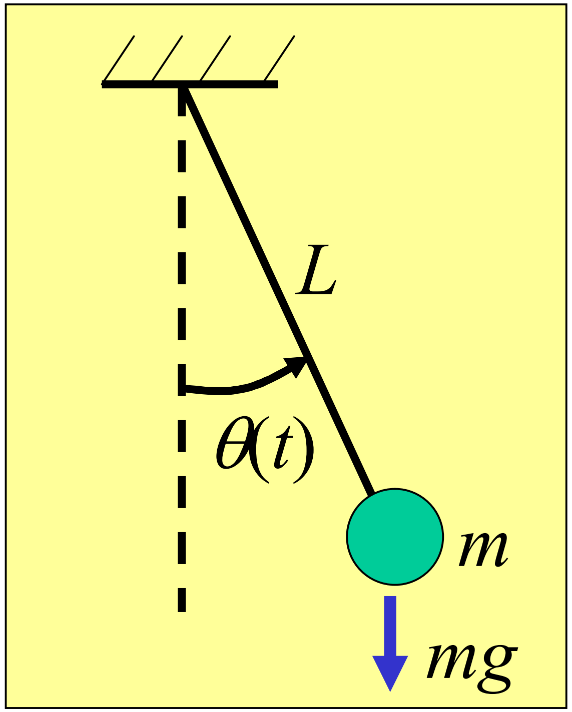
LINEARIZAÇÃO

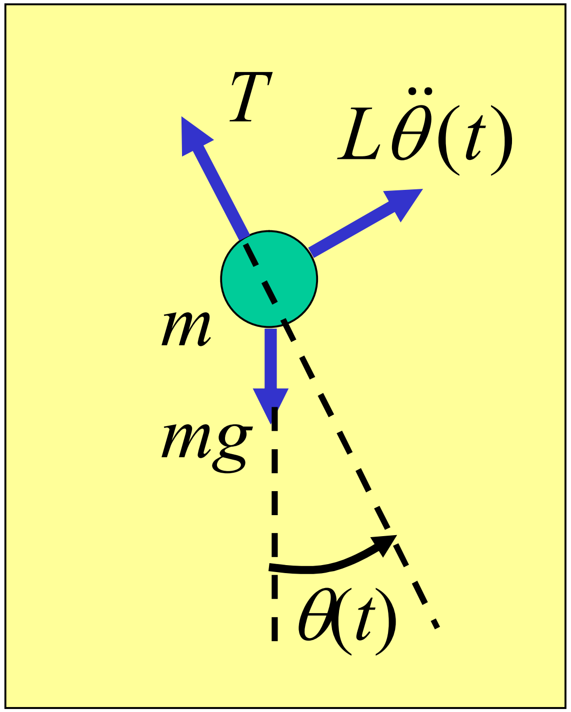
Expansão em torno de um ponto de equilíbrio :

- **deixa de ser válida quando o sistema se afasta da posição de equilíbrio**
- **isso sempre acontece quando o ponto de equilíbrio é instável**

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Exemplo: pêndulo simples





$$\sum F_t = -mg\sin(\theta) = mL\ddot{\theta}(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\sin(\theta)$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Pêndulo simples: posições de equilíbrio

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad -\frac{g}{L}\sin(\theta_e) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \theta_e = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

Duas posições de equilíbrio distintas:

$$\theta_{e1} = 0$$

$$\theta_{e2} = \pi$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Pêndulo simples: linearização

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\sin(\theta) = F(\theta, \dot{\theta})$$

$$\ddot{\theta}(t) \cong F(\theta_e, 0) + \left.\frac{\partial F(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_e} (\theta - \theta_e) + \left.\frac{\partial F(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}}\right|_{\theta=\theta_e} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_e)$$

$$\ddot{\theta}(t) \cong -\frac{g}{L}\sin(\theta_e) - \frac{g}{L}\left.\frac{\partial[\sin(\theta)]}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_e} (\theta - \theta_e) - \frac{g}{L}\left.\frac{\partial[\sin(\theta)]}{\partial \dot{\theta}}\right|_{\theta=\theta_e} \dot{\theta}$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Pêndulo simples: linearização

$$\ddot{\theta}(t) \cong -\frac{g}{L}\sin(\theta_e) - \frac{g}{L}\left.\frac{\partial\left[\sin(\theta)\right]}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_e}(\theta-\theta_e) - \frac{g}{L}\left.\frac{\partial\left[\sin(\theta)\right]}{\partial\dot{\theta}}\right|_{\theta=\theta_e}\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}(t) \cong -\frac{g}{L}\cos(\theta_e)(\theta-\theta_e)$$

$$x(t) = \theta(t) - \theta_e \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = \left[-\frac{g}{L}\cos(\theta_e)\right]x(t)$$

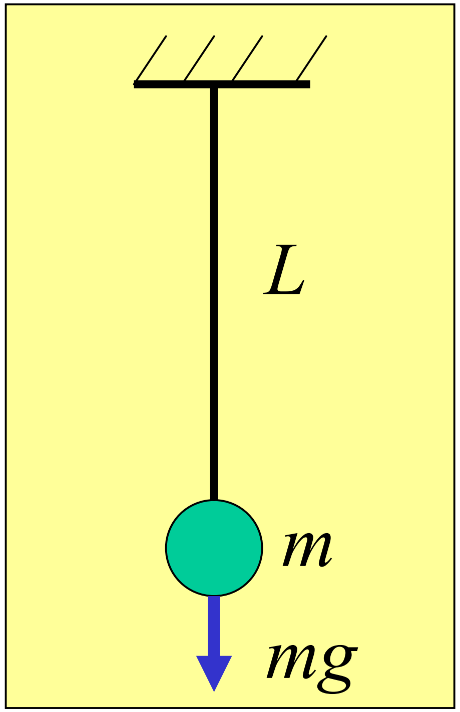
PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Pêndulo simples: linearização

$$\ddot{x}(t) = \left[-\frac{g}{L}\cos(\theta_e) \right] x(t) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{g}{L}\cos(\theta_e), \quad c = 0$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Posições de equilíbrio $\theta_{e1} = 0$



$$\ddot{x} = \left[-\frac{g}{L}\cos(\theta_e) \right] x = -\frac{g}{L} x$$

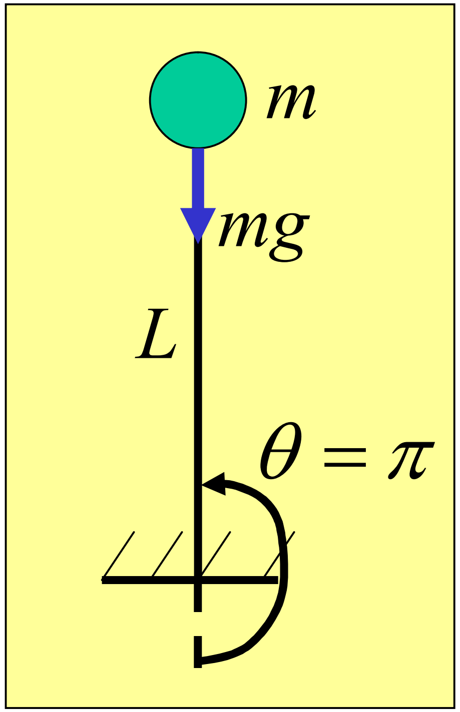
$$k = \frac{g}{L} > 0$$

$$c = 0$$

Equilíbrio estável

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Posições de equilíbrio $\theta_{e2} = \pi$



$$\ddot{x} = \left[-\frac{g}{L}\cos(\theta_e) \right] x = \frac{g}{L} x$$

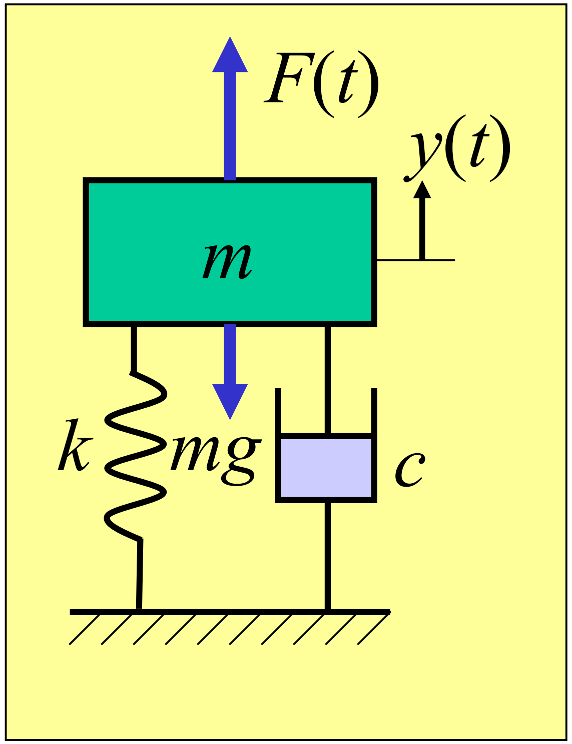
$$k = -\frac{g}{L} < 0$$

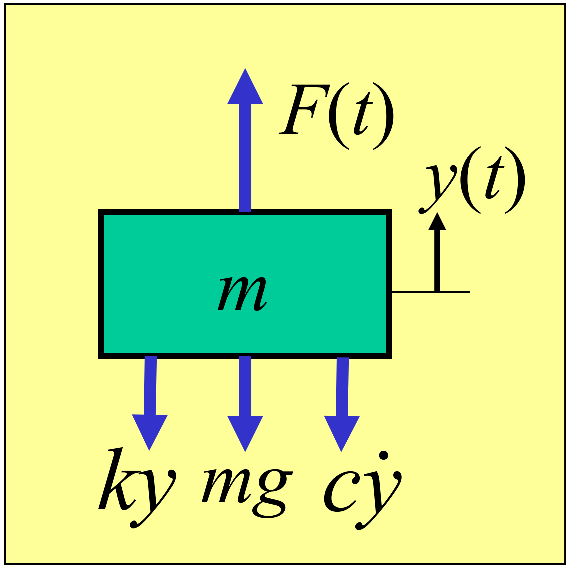
$$c = 0$$

⇨ **Equilíbrio instável**

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Exemplo: efeito da força da gravidade





$$m\ddot{y}(t) = F(t) - c\dot{y}(t) - ky(t) - mg$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Exemplo: efeito da força da gravidade

$$m\ddot{y}(t) = F(t) - c\dot{y}(t) - ky(t) - mg$$

Posição de equilíbrio presença da gravidade

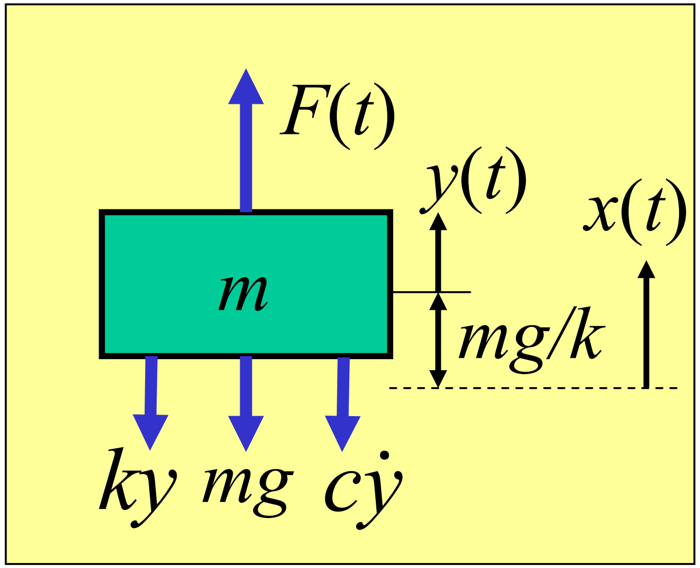
$$y = y_e$$
$$\dot{y} = 0$$
$$F(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -ky_e - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad y_e = -\frac{mg}{k}$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Exemplo: efeito da força da gravidade

Posição de equilíbrio presença da gravidade



$$y_e = -\frac{mg}{k}$$

$$x(t) = y(t) - y_e = y(t) + \frac{mg}{k}$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Exemplo: efeito da força da gravidade

$$x(t) = y(t) - y_e = y(t) + \frac{mg}{k}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t)$$

Substituindo na equação de equilíbrio:

$$m\ddot{y}(t) = F(t) - c\dot{y}(t) - ky(t) - mg$$

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - c\dot{x}(t) - k\left(x(t) - \frac{mg}{k}\right) - mg$$

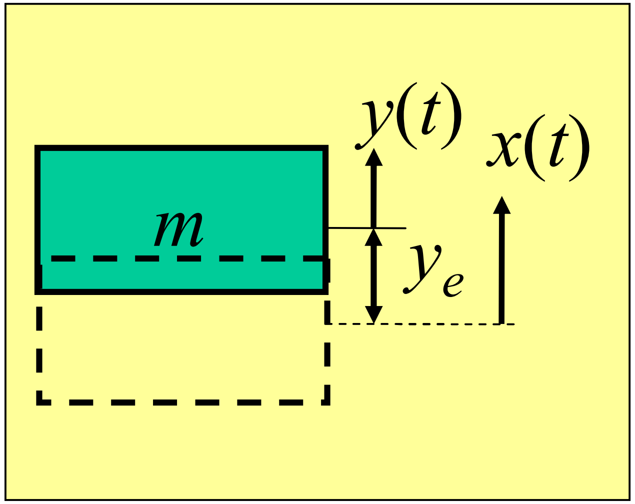
PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Exemplo: efeito da força da gravidade

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - c\dot{x}(t) - k\left(x(t) - \frac{mg}{k}\right) - mg$$

Simplificando:

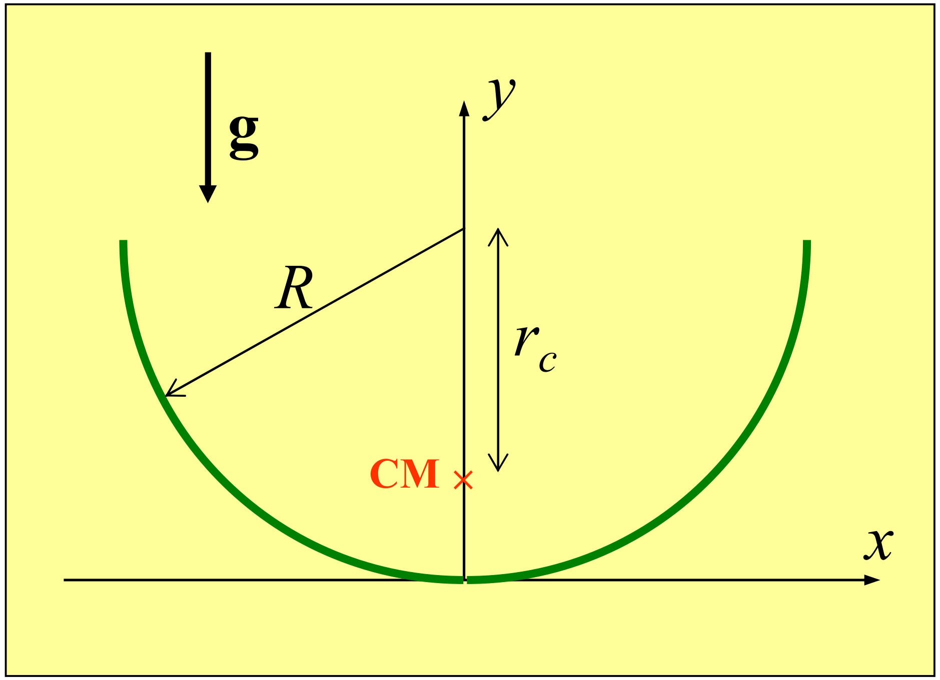
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$



onde $x(t)$ é medido em relação à posição de equilíbrio

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Exemplo:

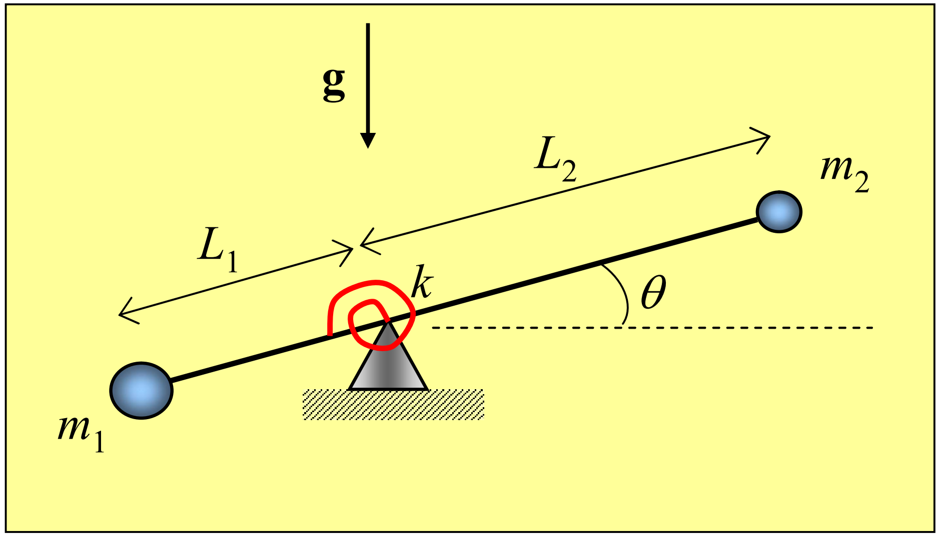


Casca cilíndrica fina de massa *m* oscilando sob ação da gravidade.

$$r_c = 2R/\pi$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES EM TORNO DE UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Exercício:



Obtenha a condição envolvendo m_1, m_2, L_1, L_2, k e g para que o pêndulo seja estável na configuração de equilíbrio que corresponde ao menor valor absoluto de θ.

SISTEMAS DISCRETOS

ELEMENTOS IDEAIS

Massa ideal:

- armazena energia cinética
- rígida

Equação constitutiva: lei de Newton

(válida apenas em um referencial inercial)

$$F = m\ddot{x}(t)$$

ELEMENTOS IDEAIS

Mola ideal:

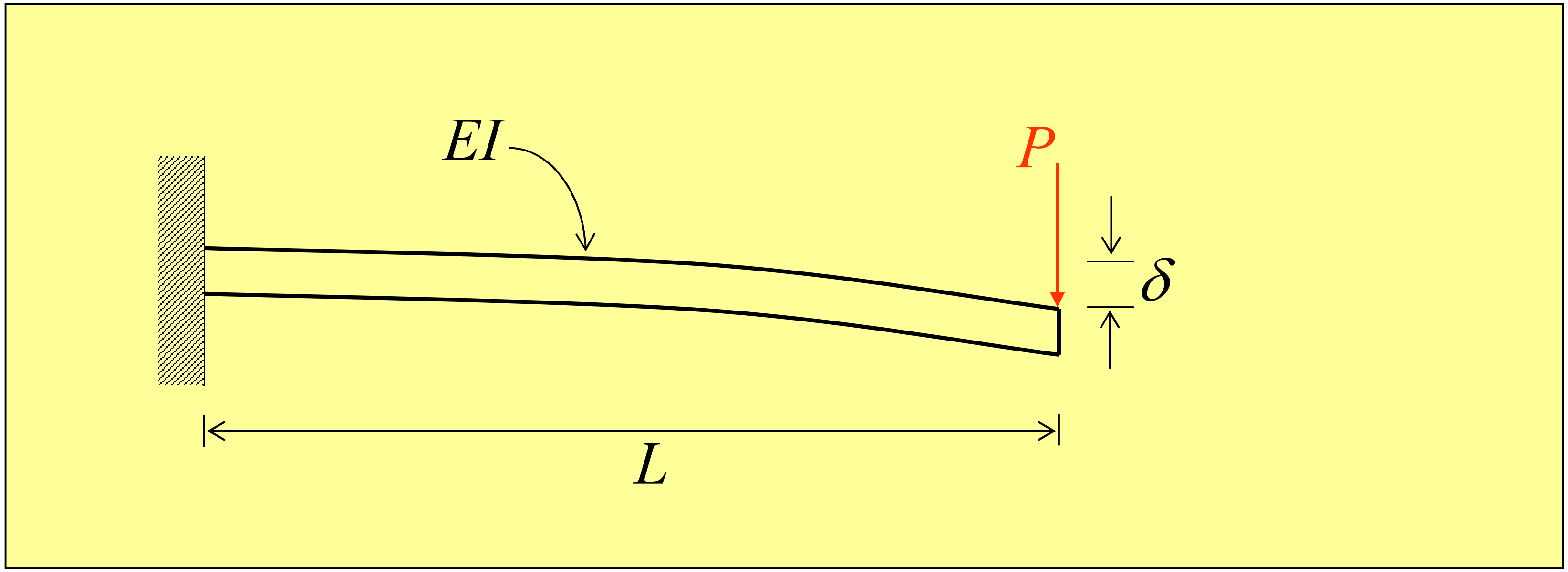
- armazena energia potencial elástica
- não tem massa
- não dissipa energia (sem histerese)
- linear

Equação constitutiva: lei de Hooke

$$F = kx(t)$$

ELEMENTOS IDEAIS

Mola ideal representada por estrutura contínua: exemplo da viga.



ELEMENTOS IDEAIS

Amortecedor ideal:

- dissipa energia
- não tem massa
- não tem rigidez
- viscoso

Equação constitutiva: atrito viscoso

$$\boxed{F = c\dot{x}(t)}$$

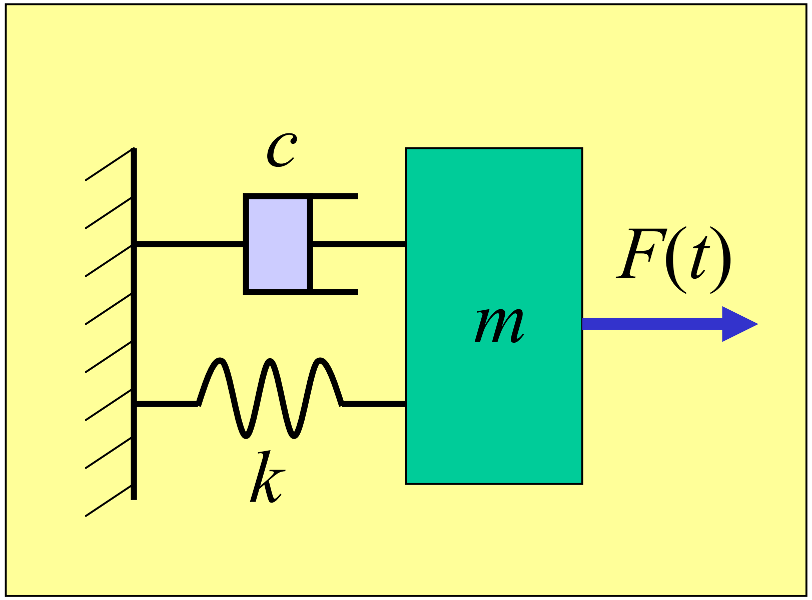
ELEMENTOS IDEAIS

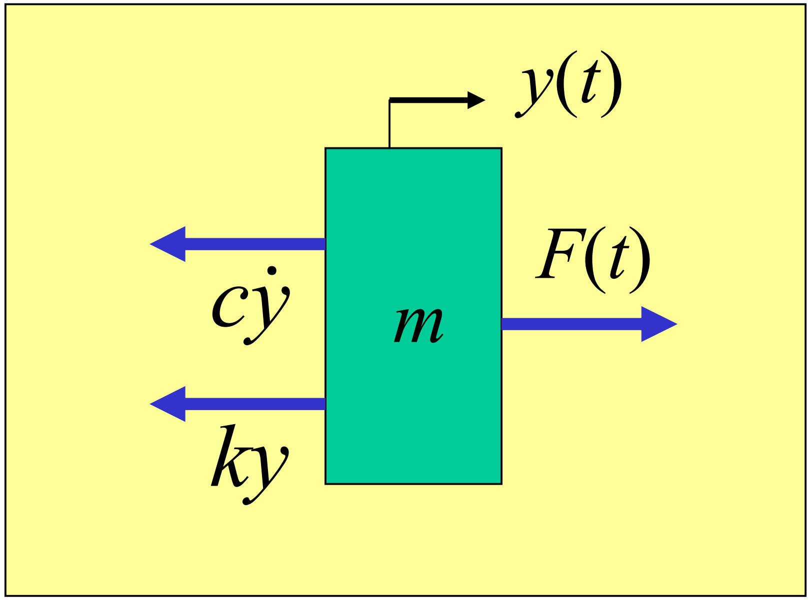
Dissipadores de energia: atrito

- **atrito viscoso** $F_{at} = c\dot{x}(t)$
- **atrito coulombiano** $F_{at} = -\mu N$
- **atrito aerodinâmico**
- **histerese (atrito sólido)**

SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE





Equilíbrio de forças:

$$m\ddot{y}(t) = F(t) - c\dot{y}(t) - ky(t)$$

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Modelagem via equação de Lagrange:

energia cinética: $T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2(t)$

energia potencial elástica: $V = \frac{1}{2} k y^2(t)$

Lagrangeano: $L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2(t) - \frac{1}{2} k y^2(t)$

trabalho das forças não conservativas:

$$\delta \overline{W} = \left(F(t) - c\dot{y}(t) \right) \delta y(t)$$
$$= Q_y(t)\, \delta y(t)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Modelagem via equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=Q_y(t)$$

$$\frac{d}{dt}\big(m\dot{y}(t)\big)+ky(t)=F(t)-c\dot{y}(t)$$

$$m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=F(t)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

Normalização da equação de equilíbrio:

$$\ddot{y}(t) + \frac{c}{m}\dot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{k}{m}\frac{F(t)}{k}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \qquad 2\zeta\omega_n = \frac{c}{m} \qquad f(t) = \frac{F(t)}{k}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Normalização da equação de equilíbrio:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 f(t)$$

ω_n^2 freqüência natural não amortecida

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$ fator de amortecimento

$f(t)$ deslocamento estático equivalente

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Normalização da equação de equilíbrio:

- a dinâmica de um sistema de um grau de liberdade é inteiramente caracterizada por dois parâmetros: ζ e ω_n.
- note que $f(t)$ está associado com a excitação externa e não com as propriedades do sistema

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

fator de amortecimento

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

- diretamente proporcional a viscosidade
- inversamente proporcional raiz da massa
- inversamente proporcional raiz da rigidez
- em problemas de análise estrutural, ζ é pequeno (da ordem de 0.02)

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Solução da equação de equilíbrio:

PROBLEMA DE VIBRAÇÃO LIVRE

solução da equação homogênea associada

PROBLEMA DE VIBRAÇÃO FORÇADA

solução particular

SOLUÇÃO GERAL

solução homogênea + solução particular

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Solução da equação de equilíbrio:

a) solução da equação homogênea equivalente

$$\ddot{y}_h(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}_h(t) + \omega_n^2 y_h(t) = 0$$

b) solução particular

$$\ddot{y}_p(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}_p(t) + \omega_n^2 y_p(t) = \omega_n^2 f(t)$$

c) solução geral

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad \Longleftrightarrow$$

condições iniciais

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Classificação quanto ao tipo de excitação:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 f(t)$$

$f(t) = 0$ $\Rightarrow$ **vibração livre** $\Rightarrow$

- **amortecida**
- **não amortecida**

$f(t) \neq 0$ $\Rightarrow$ **vibração forçada** $\Rightarrow$

- **periódica**
- **transiente**

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE: $f(t) = 0$

SOLUÇÃO GERAL = solução homogênea

(movimento é devido às condições iniciais)

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0$$

condições iniciais →

$$y(0) = y_0$$
$$\dot{y}(0) = v_0$$

SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE:

VIBRAÇÃO LIVRE

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

$$f(t) = 0; \quad \zeta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0$$

solução homogênea = solução geral:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

solução via método clássico

usa-se a igualdade: $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

para resolver: $\ddot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0$

assumir: $y(t) = De^{pt} \Rightarrow \ddot{y}(t) = p^2 De^{pt}$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

solução via método clássico

equação característica: $\left(p^2 + \omega_n^2\right) D\, e^{pt} = 0$

$De^{pt} = 0 \Rightarrow$ **solução trivial**

$De^{pt} \neq 0 \Rightarrow$ $p_1 = j\omega_n$, $p_2 = -j\omega_n$

solução: $y(t) = D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t}$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

solução via método clássico

$$
\begin{aligned}
y(t) &= D_1 e^{j\omega_n t} + D_2 e^{-j\omega_n t} \\
&= D_1\left(\cos(\omega_n t) + j\sin(\omega_n t)\right) + D_2\left(\cos(\omega_n t) - j\sin(\omega_n t)\right) \\
&= \left(D_1 + D_2\right)\cos(\omega_n t) + j\left(D_1 - D_2\right)\sin(\omega_n t)
\end{aligned}
$$

y(t) é real:

$D_1 + D_2$ é real

$D_1 - D_2$ é imaginário puro

→ **D_1 e D_2 são complexos conjugados**

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

solução via método clássico

D_1 e D_2 são complexos conjugados

$$D_1 = \frac{(C_1 - jC_2)}{2} \qquad D_2 = \frac{(C_1 + jC_2)}{2}$$

$$D_1 + D_2 = C_1 \qquad D_1 - D_2 = -jC_2$$

$$y(t) = (D_1 + D_2)\cos(\omega_n t) + j(D_1 - D_2)\sin(\omega_n t)$$

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$$

onde C_1 e C_2 são números reais

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

solução homogênea = solução geral:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$$

condições iniciais →

$$y(0) = y_0$$
$$\dot{y}(0) = v_0$$

→

$$C_1 = y_0$$
$$C_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

solução para condições iniciais arbitrárias:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

CONCLUSÃO:

em vibração livre, o movimento só é possível na freqüência natural do sistema

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

solução alternativa:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$y(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$$

$$y(t) = A\cos(\phi)\cos(\omega_n t) + A\sin(\phi)\sin(\omega_n t)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

comparação entre as soluções alternativas:

$$y(t) = A\cos(\phi)\cos(\omega_n t) + A\sin(\phi)\sin(\omega_n t)$$

$$y(t) = C_1\cos(\omega_n t) + C_2\sin(\omega_n t)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} C_1 &= A\cos(\phi) \\ C_2 &= A\sin(\phi) \end{aligned}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

solução alternativa:

$$y(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$$

$$C_1 = A\cos(\phi)$$
$$C_2 = A\sin(\phi)$$

$$\Rightarrow$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{y_0\omega_n}\right)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

$$y(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$$

A: **amplitude (depende das condições iniciais)**

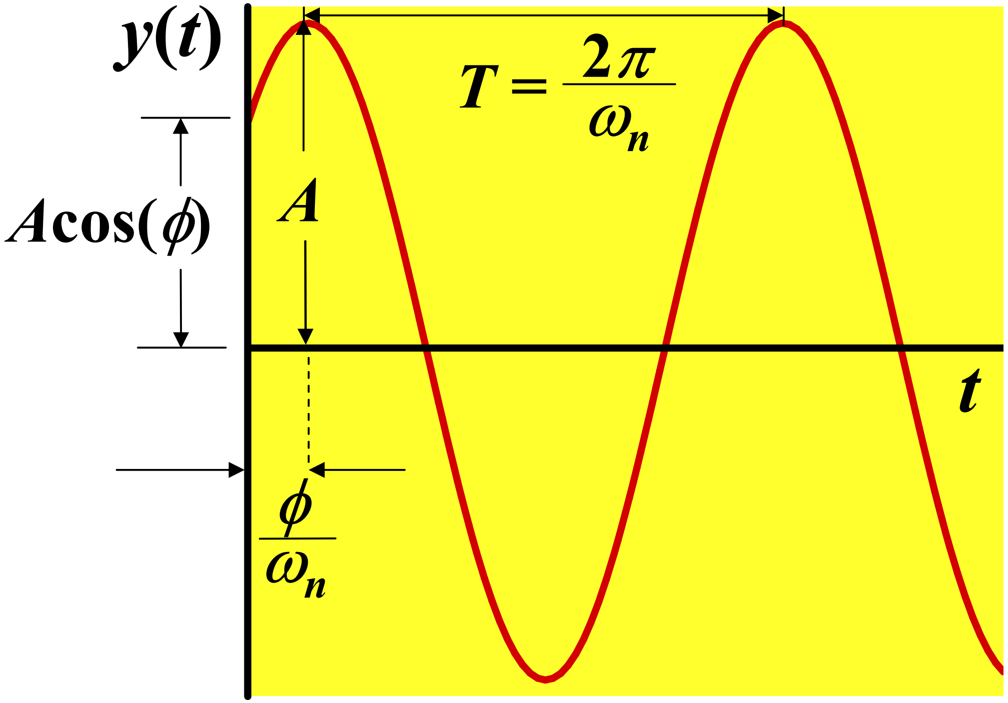
ϕ: **fase (depende das condições iniciais)**

ω_n: **freqüência natural**

$T = 2\pi/\omega_n$: **período**

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:



$$y(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

aplicação das soluções alternativas:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$$

conveniente para aplicar condições iniciais

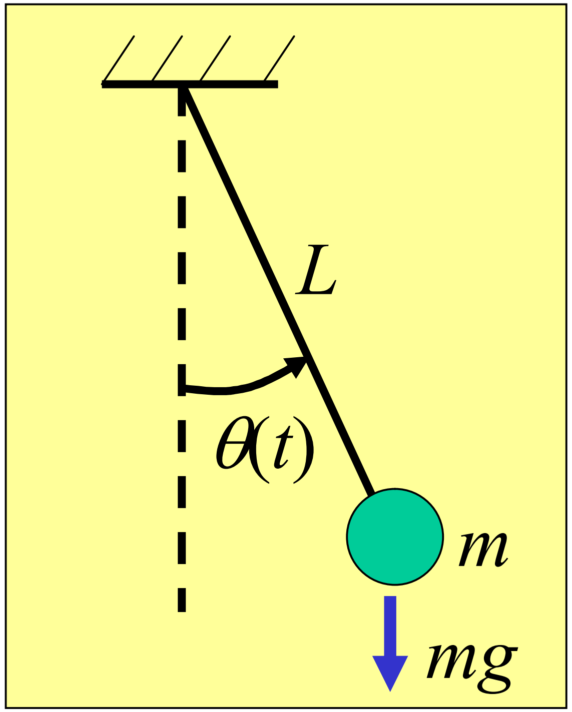
$$y(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$$

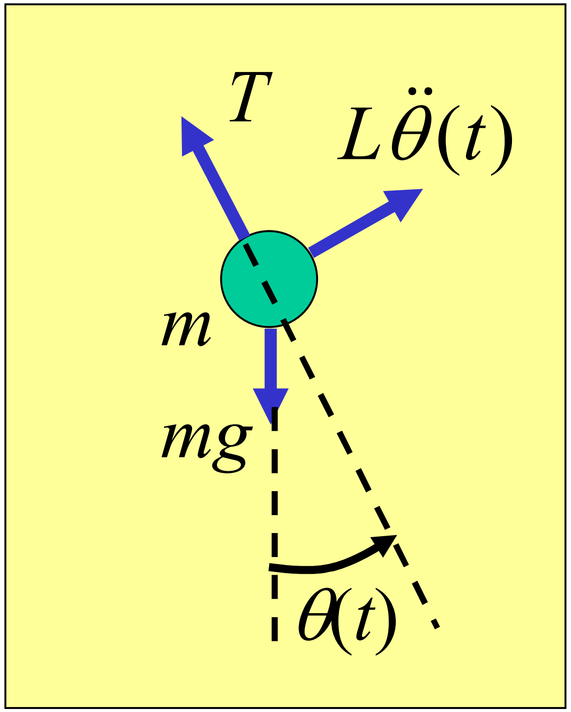
conveniente para visualização gráfica

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

Exemplo: pêndulo simples





$$\sum F_t = -mg\sin(\theta) = mL\ddot{\theta}(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\sin(\theta)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

Exemplo: pêndulo simples

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0 \xrightarrow{\text{linearização}} \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L}\theta = 0$$

forma padrão

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_n^2\theta(t) = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

Exemplo: pêndulo simples (solução linear)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

período independe das condições iniciais

solução para condições iniciais arbitrárias:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE NÃO-AMORTECIDA:

Exemplo: pêndulo simples (solução linear)

CONCLUSÕES

- **período independe das condições iniciais**
- **amplitude depende das condições iniciais**
- **solução é válida para pequenas oscilações (devido à linearização)**

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

$$f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0$$

solução homogênea = solução geral:

- **forma da solução depende do fator de amortecimento**

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

solução via método clássico

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0$$

assumir:

$$y(t) = De^{pt} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{y}(t) &= pDe^{pt} \\ \ddot{y}(t) &= p^2 De^{pt} \end{aligned}$$

equação característica:

$$(p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2)\, D\, e^{pt} = 0$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

solução via método clássico

equação característica:

$$p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 = 0$$

raízes:

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

solução via método clássico

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- $\zeta < 1$: **raízes complexas conjugadas**
- $\zeta = 1$: **raízes reais e repetidas**
- $\zeta > 1$: **raízes reais e distintas**

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

solução via método clássico

$\zeta < 1$: raízes complexas conjugadas

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

o módulo das raízes não depende de ζ:

$$\|p_1\| = \|p_2\| = \sqrt{(-\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2\left(1-\zeta^2\right)} = \omega_n$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

solução via método clássico

$\zeta = 1$: raízes repetidas

$$p_1 = p_2 = -\omega_n$$

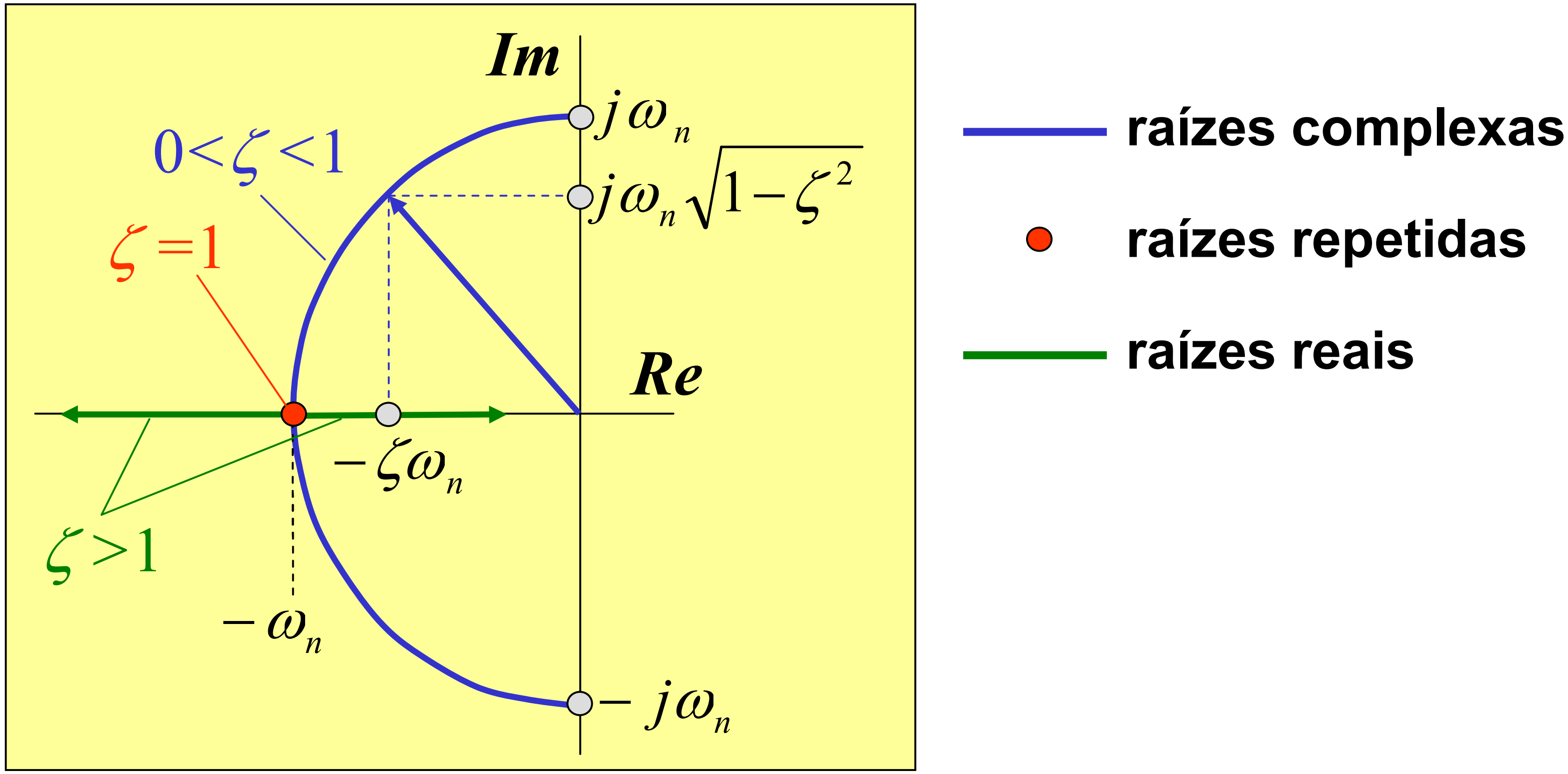
$\zeta > 1$: raízes reais negativas

- uma das raízes é maior que $-\omega_n$ e a outra menor que $-\omega_n$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

Representação gráfica das raízes



SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 1: amortecimento sub-crítico: $\zeta < 1$

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$y(t) = D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t} = D_1 e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)t} + D_2 e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_d)t}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t}\left(D_1 e^{j\omega_d t} + D_2 e^{-j\omega_d t}\right)$$

onde: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ → **freqüência natural amortecida**

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 1: amortecimento sub-crítico: $\zeta < 1$

$$
\begin{aligned}
D_1 e^{j\omega_d t} + D_2 e^{-j\omega_d t} &= C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t) \\
&= A \cos(\omega_d t - \phi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{-\zeta\omega_n t}\left(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)\right) \\
&= A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)
\end{aligned}
$$

duas formas equivalentes de expressar a solução

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 1: amortecimento sub-crítico: $\zeta < 1$

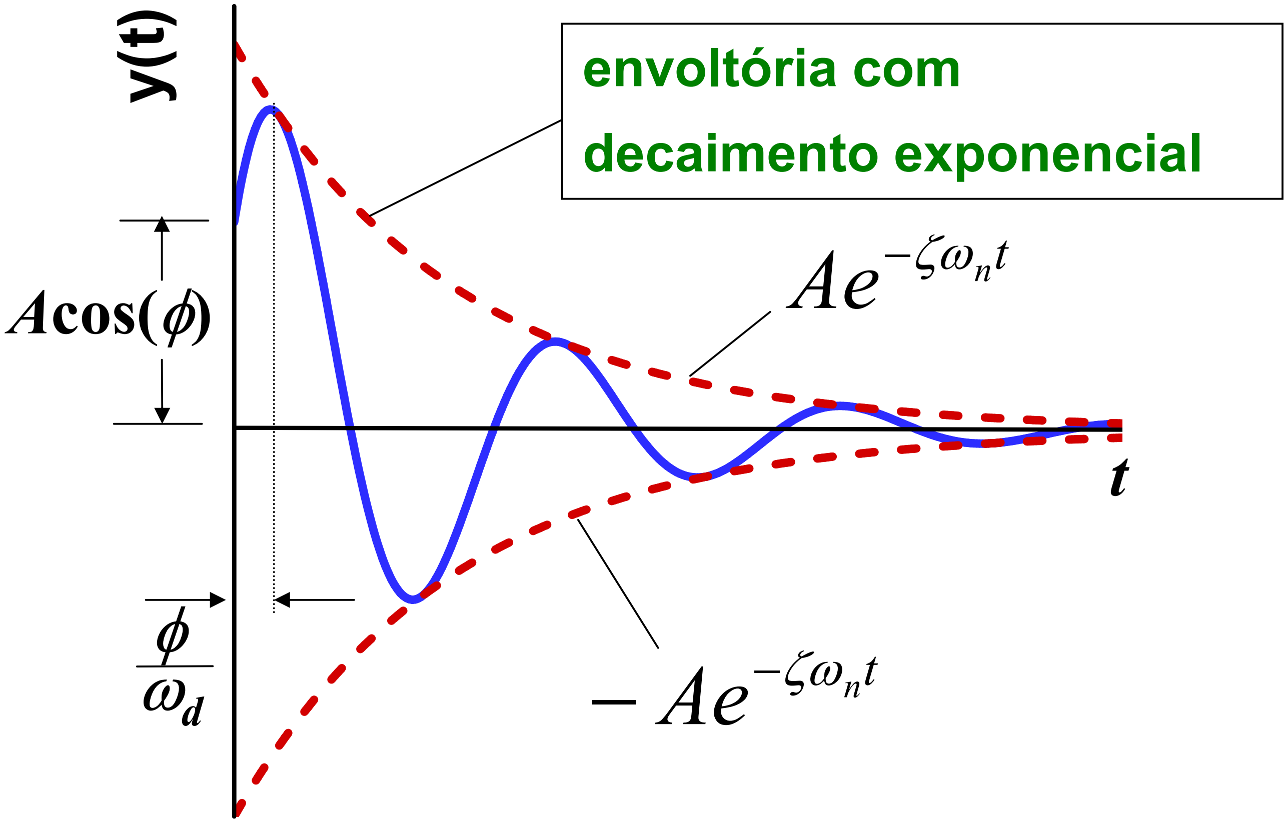
$$y(t) = \underbrace{Ae^{-\zeta\omega_n t}}_{\text{amplitude exponencialmente amortecida}} \underbrace{\cos(\omega_d t - \phi)}_{\text{termo harmônico de freqüência } \omega_d}$$

amplitude exponencialmente amortecida

termo harmônico de freqüência ω_d

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA: $\zeta < 1$



SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 1: amortecimento sub-crítico: $\zeta < 1$

solução para condições iniciais gerais

$$y(0) = y_0$$
$$\dot{y}(0) = v_0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(y_0 \cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 1: amortecimento sub-crítico: $\zeta < 1$

solução para condições iniciais gerais

$$y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = v_0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$$

amplitude

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_d}\right)^2}$$

fase

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_d y_0}\right)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 2: amortecimento crítico: $\zeta = 1$

$$p_1 = p_2 = -\omega_n$$

soluções independentes →

$$y_1(t) = e^{p_1 t} = e^{-\omega_n t}$$

e

$$y_2(t) = te^{p_1 t} = te^{-\omega_n t}$$

solução geral →

$$y(t) = C_1 e^{-\omega_n t} + C_2 te^{-\omega_n t}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 2: amortecimento crítico: $\zeta = 1$

$$y(t) = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{-\omega_n t}$$

termo linear

amortecimento exponencial

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 2: amortecimento crítico: $\zeta = 1$

solução para condições iniciais gerais

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(0) &= v_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \left(y_0 + \left(v_0 + \omega_n y_0\right)t\right)e^{-\zeta\omega_n t}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 3: amortecimento super-crítico: $\zeta > 1$

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$y(t) = D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t}$$

$$= D_1 e^{\left(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)t} + D_2 e^{\left(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)t}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 3: amortecimento super-crítico: $\zeta > 1$

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[D_1 e^{\left(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + D_2 e^{\left(-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}\right]$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t}\left[C_1 \cosh\left(\left(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t\right) + C_2 \sinh\left(\left(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t\right)\right]$$

- solução com dois termos exponenciais
- um decai mais rapidamente que o outro

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

caso 3: amortecimento super-crítico: $\zeta > 1$

solução para condições iniciais gerais

$$y(0) = y_0$$
$$\dot{y}(0) = v_0$$

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(y_0 \cosh\left((\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t\right) + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sinh\left((\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t\right)\right)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

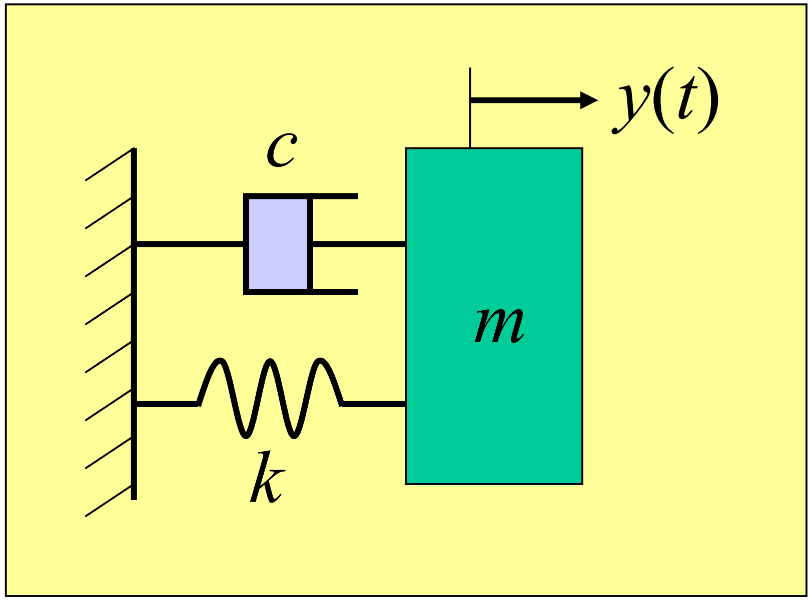
amortecimento sub-crítico, crítico, super-crítico

- a classificação do fator de amortecimento é somente devido a forma da solução matemática do problema
- não há nenhuma mudança física no sistema quando o fator de amortecimento passa de uma classificação para outra

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

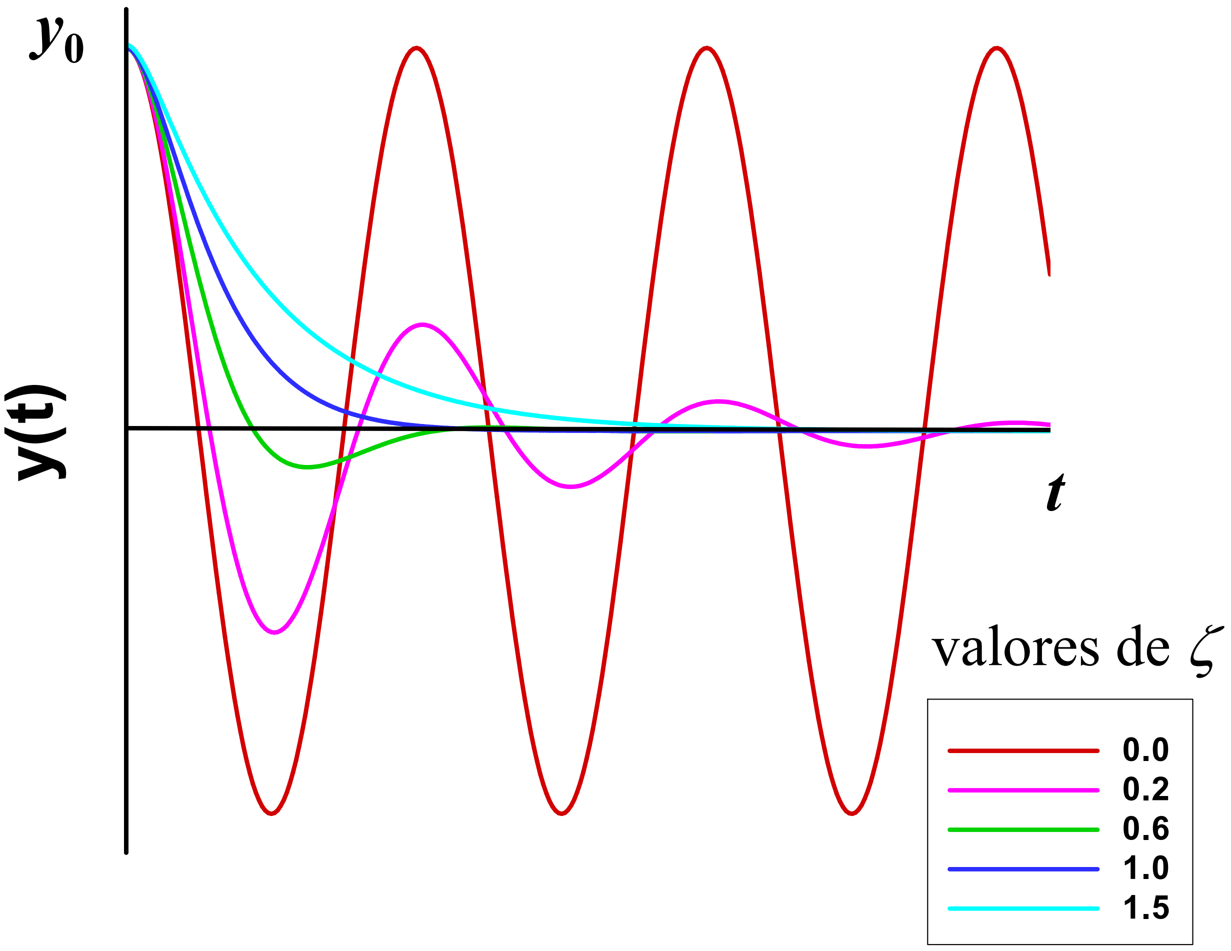
VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

exemplo: vibração livre para deslocamento inicial y_0 e velocidade inicial nula



$$y(0) = y_0$$
$$\dot{y}(0) = 0$$
$$\omega_n = \omega_0$$

EFEITO DO FATOR DE AMORTECIMENTO:

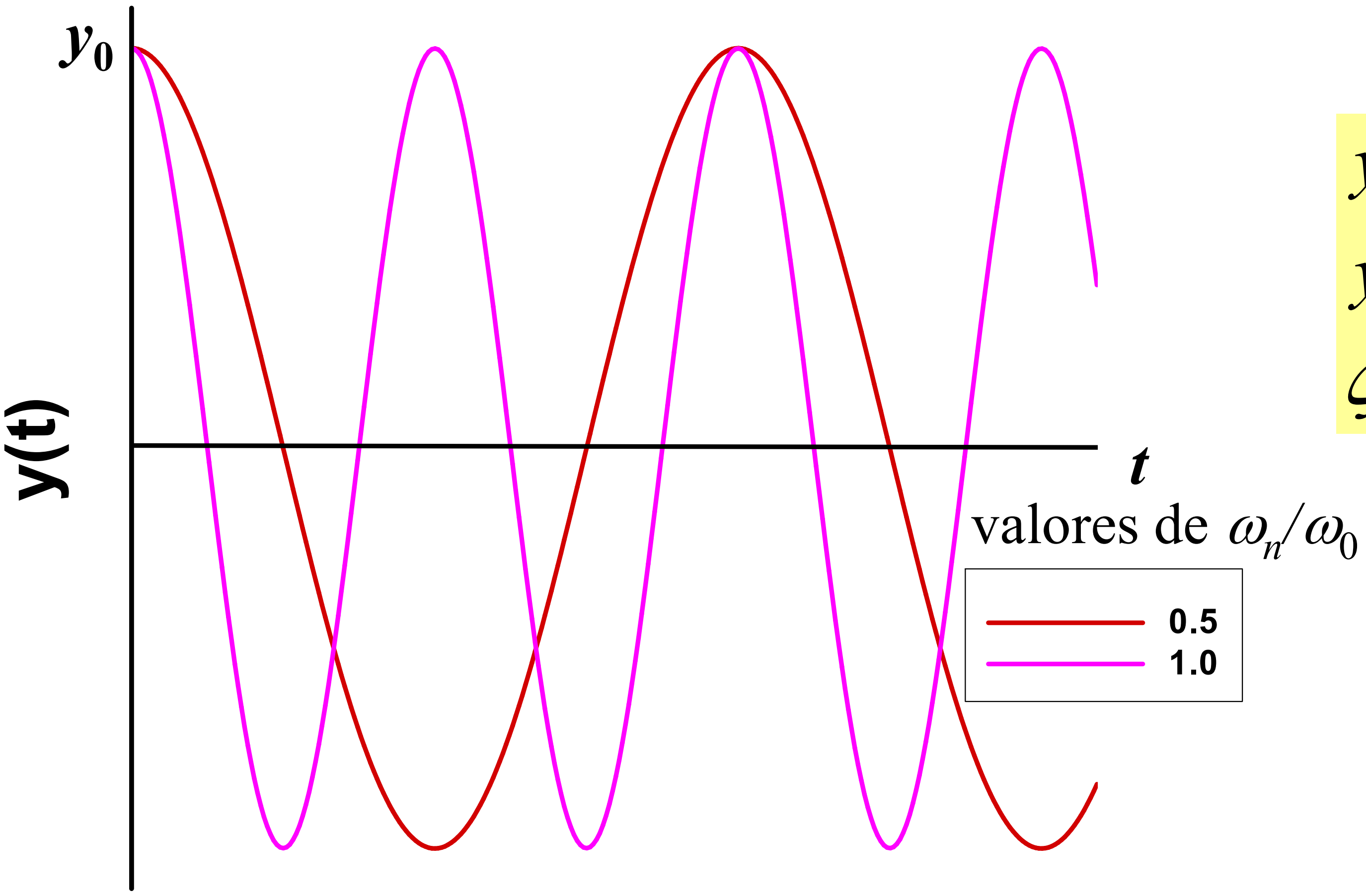


$$y(0) = y_0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\omega_n = \omega_0$$

EFEITO DA FREQÜÊNCIA NATURAL

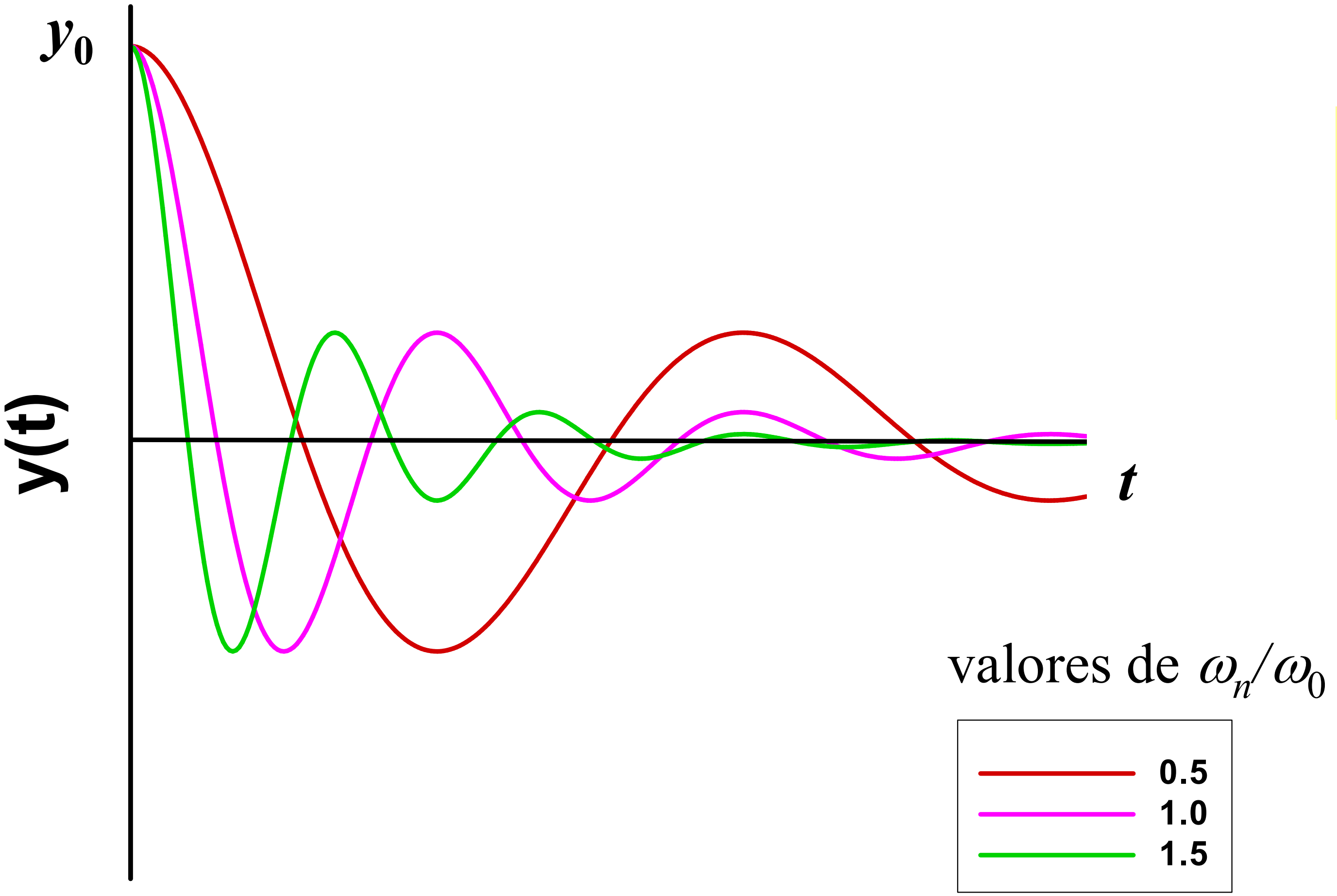


$$y(0) = y_0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

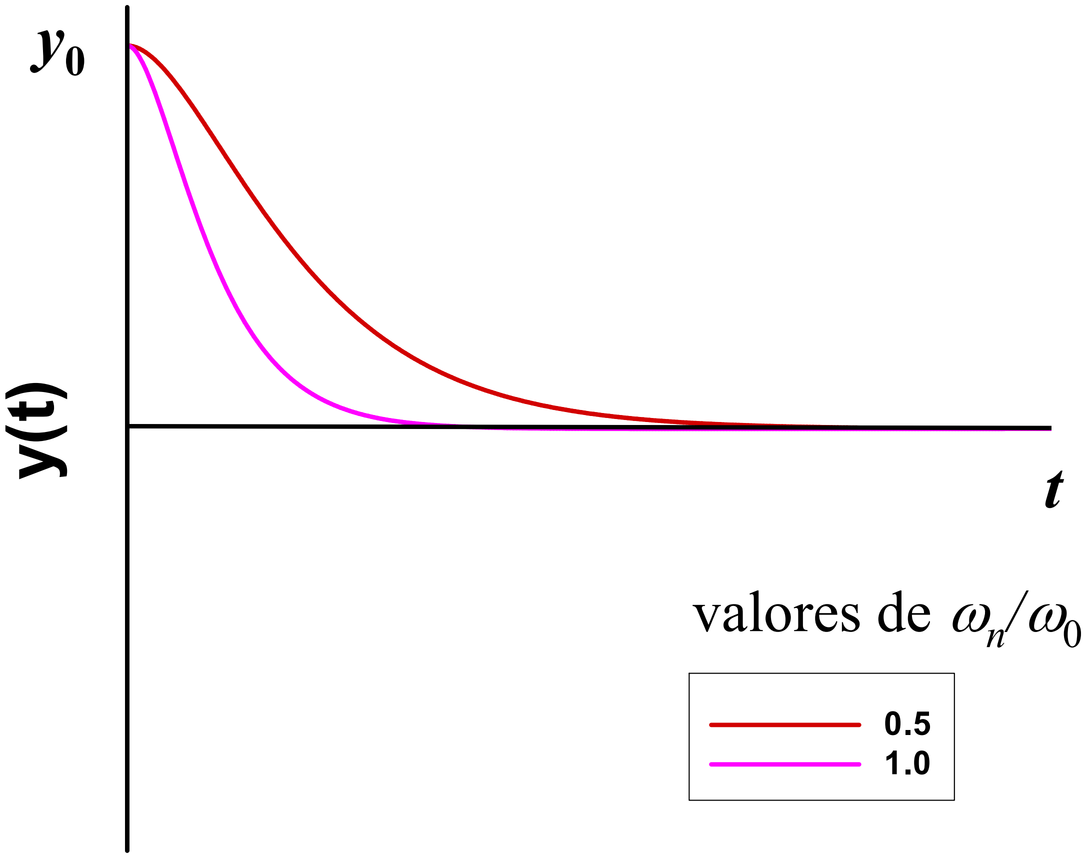
$$\zeta = 0.0$$

EFEITO DA FREQÜÊNCIA NATURAL



$$y(0) = y_0$$
$$\dot{y}(0) = 0$$
$$\zeta = 0.2$$

EFEITO DA FREQÜÊNCIA NATURAL



$$y(0) = y_0$$
$$\dot{y}(0) = 0$$
$$\zeta = 1.0$$

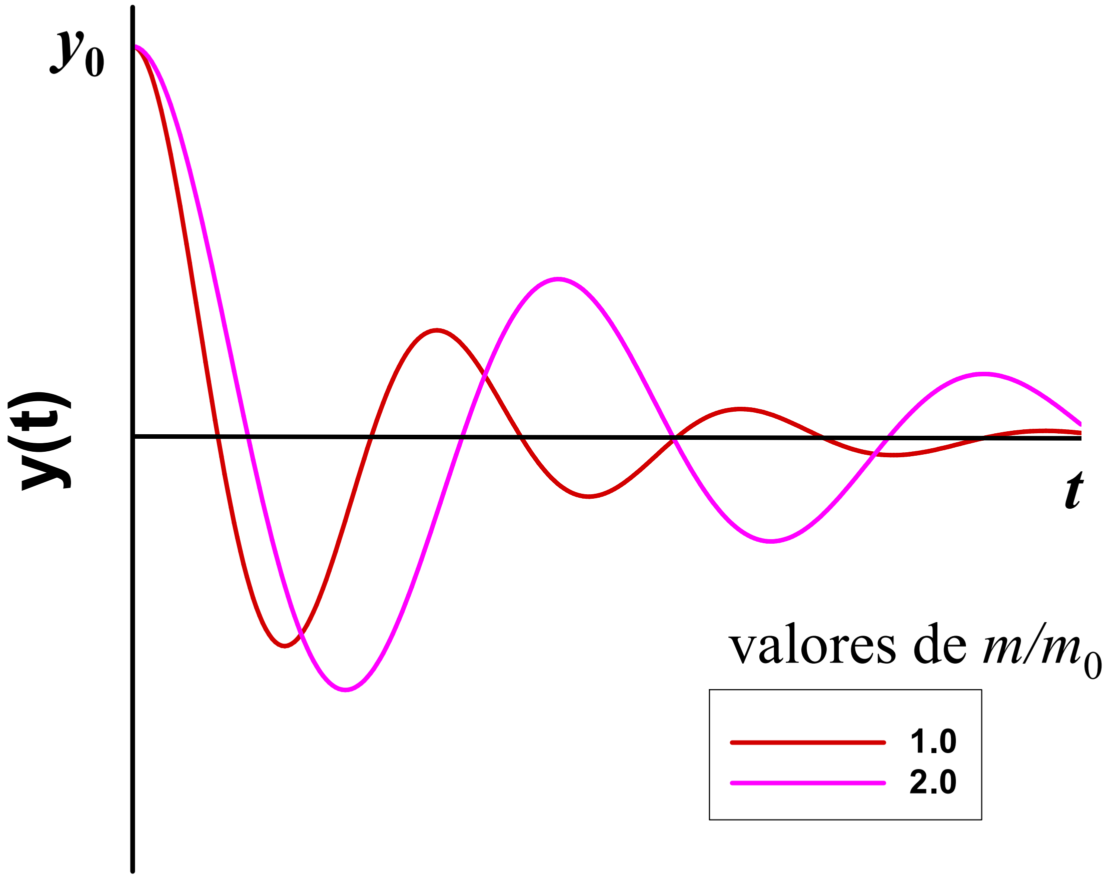
EFEITO DA MASSA

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

- a variação da massa afeta simultaneamente a freqüência natural e o fator de amortecimento do sistema
- ambas grandezas variam com o inverso da raiz quadrada da massa

EFEITO DA MASSA: exemplo



$$m = m_0$$

$$\omega_n = \omega_0$$

$$\zeta = \zeta_0 = 0.2$$

$$m = 2m_0$$

$$\omega_n = \omega_0 / \sqrt{2}$$

$$\zeta = \zeta_0 / \sqrt{2}$$

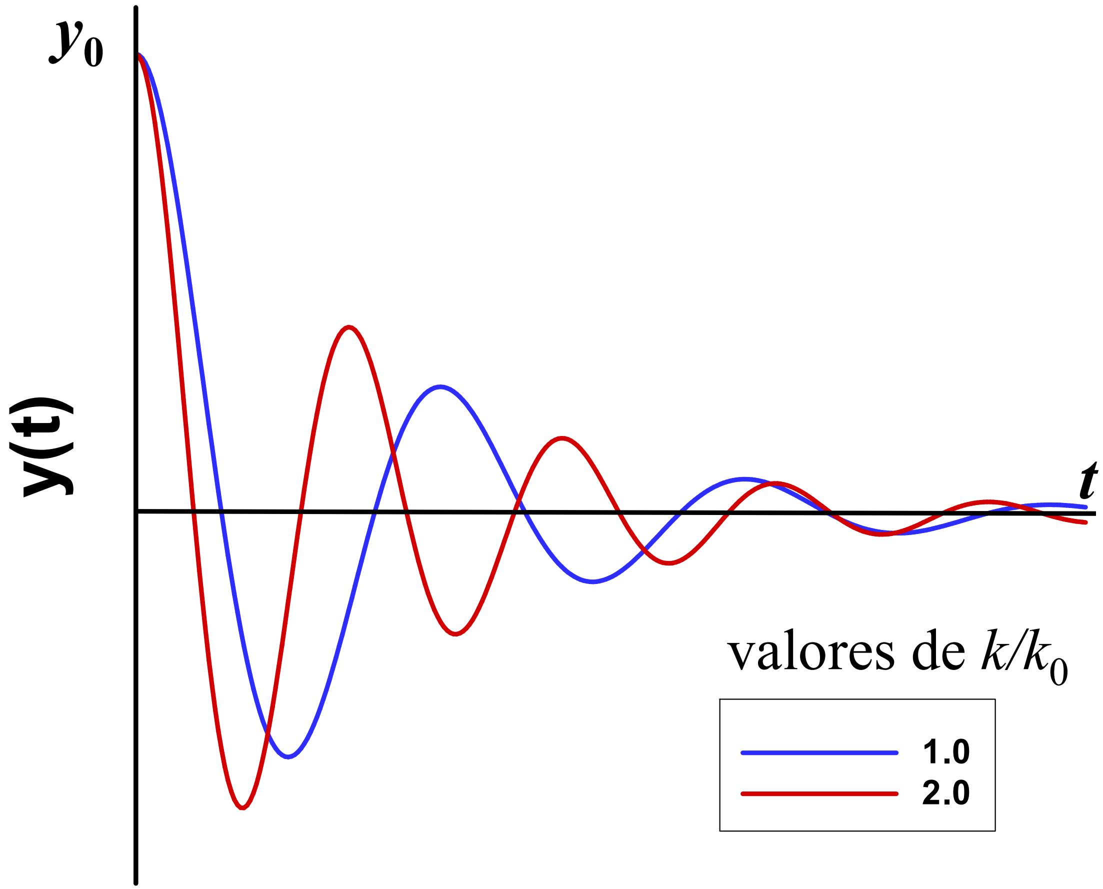
EFEITO DA RIGIDEZ

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

- a variação da rigidez afeta simultaneamente a freqüência natural e o fator de amortecimento do sistema
- a freqüência natural varia com a raiz quadrada da rigidez e o fator de amortecimento com o inverso da raiz da rigidez

EFEITO DA RIGIDEZ: exemplo



$$k = k_0$$

$$\omega_n = \omega_0$$

$$\zeta = \zeta_0 = 0.2$$

$$k = 2k_0$$

$$\omega_n = \sqrt{2}\omega_0$$

$$\zeta = \zeta_0 / \sqrt{2}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

amortecimento sub-crítico: $\zeta < 1$

Decremento logarítmico

$$y(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$$

Considere dois instantes de tempo t_1 e t_2 separados por um período de oscilação:

$$t_2 = t_1 + T = t_1 + \frac{2\pi}{\omega_d}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

Decremento logarítmico

$$y_1 = y(t_1) = Ae^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)$$

$$y_2 = y(t_2) = Ae^{-\zeta\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_2 - \phi)$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)}{e^{-\zeta\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_2 - \phi)}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

Decremento logarítmico

$$t_2 = t_1 + T = t_1 + \frac{2\pi}{\omega_d} \Rightarrow \cos(\omega_d t_1 - \phi) = \cos(\omega_d t_2 - \phi)$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)}{e^{-\zeta\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_2 - \phi)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n t_2}} = e^{-\zeta\omega_n (t_1 - t_2)} = e^{\zeta\omega_n T}$$

$$\zeta\omega_n T = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

Decremento logarítmico

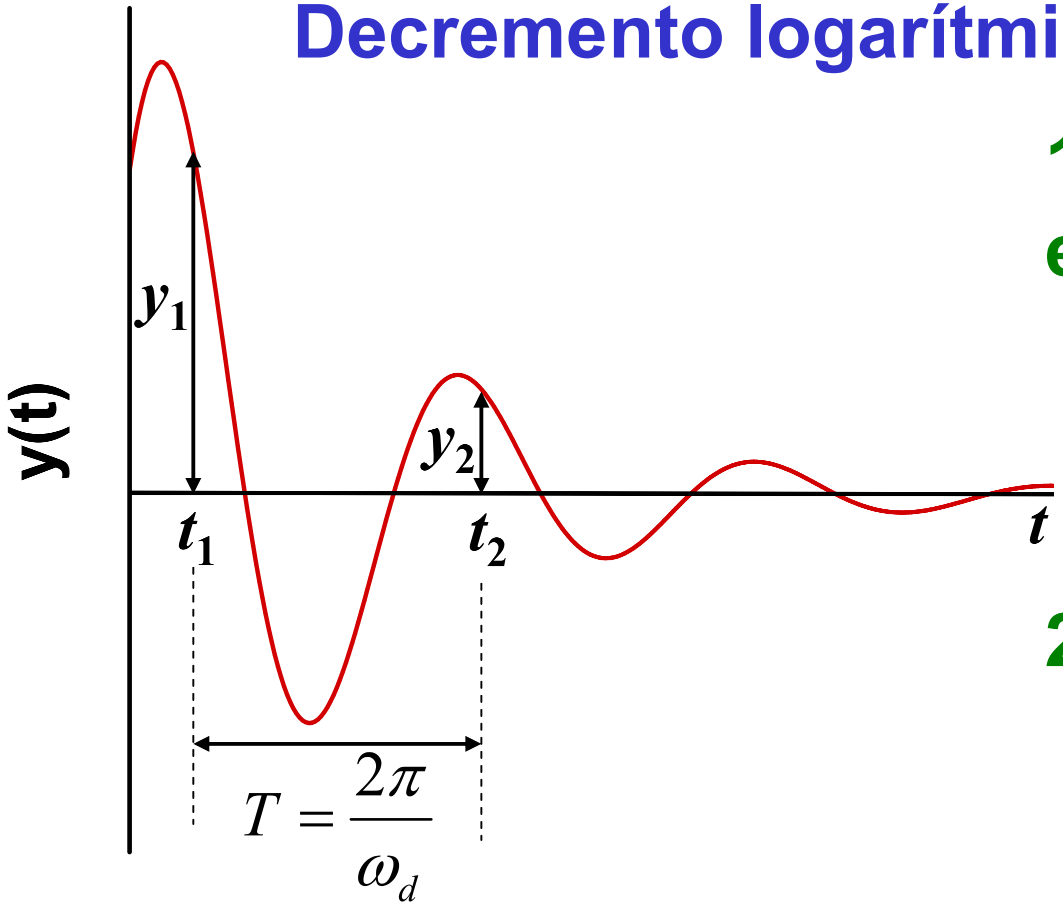
$$\frac{y_1}{y_2} = e^{\zeta\omega_n T} \Rightarrow \delta = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \zeta\omega_n T = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

onde δ é o decremento logarítmico:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Decremento logarítmico



1) obtem-se experimentalmente:

$$\delta = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$$

2) calcula-se:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

Decremento logarítmico: generalização

considere dois instantes de tempo t_1 e t_2 separados por r períodos de oscilação:

$$t_{1+r} = t_1 + rT = t_1 + r\frac{2\pi}{\omega_d} \Rightarrow \cos(\omega_d t_1 - \phi) = \cos(\omega_d t_{1+r} - \phi)$$

$$\frac{y_1}{y_{1+r}} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n t_{1+r}}} = e^{-\zeta\omega_n (t_1 - t_{1+r})} = e^{r\zeta\omega_n T}$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

Decremento logarítmico: generalização

$$\ln\left(\frac{y_1}{y_{1+r}}\right) = r\zeta\omega_n T = r\delta$$

$$\delta = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{y_1}{y_{1+r}}\right)$$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

- se o sistema é sub-amortecido, os dois parâmetros do sistema (ζ e ω_n) podem ser obtidos da resposta em vibração livre do sistema
- ζ é calculado a partir do decremento logarítmico
- ω_d é calculada a partir do período: $\omega_d = 2\pi / T$
- ω_n é calculada a partir de ω_d e ζ: $\omega_n = \omega_d / \sqrt{1-\zeta^2}$

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

Decremento logarítmico: exemplo

- Sabe-se que a amplitude da vibração de um sistema amortecido cai de 50% depois de cinco ciclos completos e que o período da vibração é de 0.5 s. Assuma amortecimento viscoso e calcule o fator de amortecimento e a freqüência natural do sistema

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA:

Decremento logarítmico: exemplo

Fazendo $r = 5$:

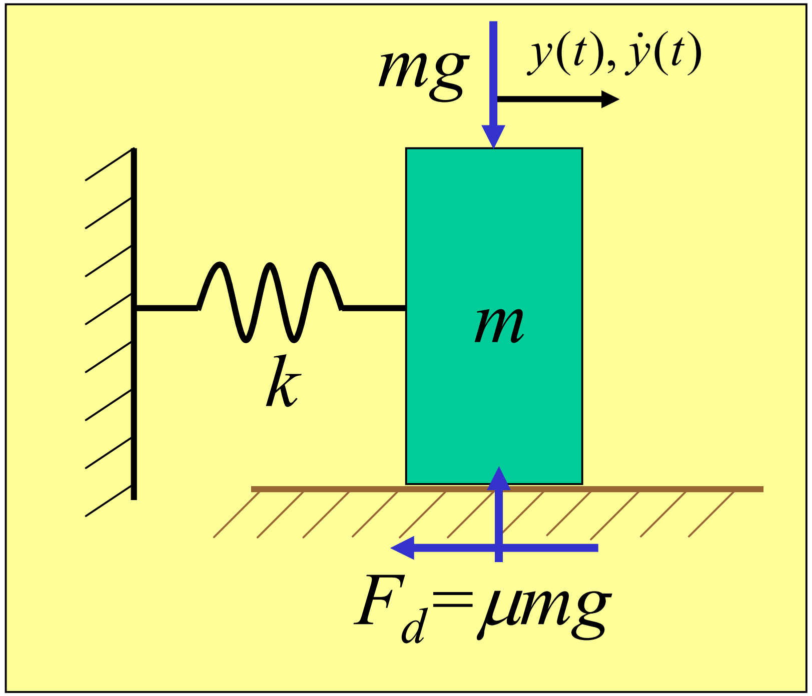
$$\delta = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{y_1}{y_{1+r}}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{y_1}{y_{1+5}}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{y_1}{y_1/2}\right) = 0.1386$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}} = 0.0221$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.56637 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 12.56944 \text{ rad/s}$$

ATRITO COULOMBIANO

sistema massa-mola com atrito coulombiano



$$m\ddot{y} + F_d \text{sinal}(\dot{y}) + ky = 0$$

se: $\dot{y} > 0$

$$m\ddot{y} + ky = -F_d$$

se: $\dot{y} < 0$

$$m\ddot{y} + ky = F_d$$

ATRITO COULOMBIANO

sistema massa-mola com atrito coulombiano

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$ freqüência natural não amortecida do sistema

$$f_d = \frac{F_d}{k}$$ deslocamento estático da mola sob ação da força de atrito

$$\frac{F_d}{m} = \frac{kf_d}{m} = \omega_n^2 f_d$$ força normalizada por unidade de massa

ATRITO COULOMBIANO

sistema massa-mola com atrito coulombiano

se: $\dot{y} > 0$

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = -\omega_n^2 f_d$$

se: $\dot{y} < 0$

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 f_d$$

condição inicial: $y(0) = y_0 > 0; \;\; \dot{y}(0) = 0$

tendência do movimento para esquerda:

$$\dot{y} < 0 \;\Rightarrow\; \ddot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 f_d$$

ATRITO COULOMBIANO

sistema massa-mola com atrito coulombiano

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 f_d$$

solução homogênea: $y_h(t) = C_1\cos(\omega_n t) + C_2\sin(\omega_n t)$

solução particular: $y_p(t) = f_d$

solução geral: $y(t) = f_d + C_1\cos(\omega_n t) + C_2\sin(\omega_n t)$

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 + f_d &= y_0 \\ \omega_n C_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= y_0 - f_d \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

ATRITO COULOMBIANO

sistema massa-mola com atrito coulombiano

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 f_d \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y(t) &= f_d + (y_0 - f_d)\cos(\omega_n t) \\ \dot{y}(t) &= -\omega_n (y_0 - f_d)\sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

a solução acima é valida para: $\dot{y} < 0$

limite de validade: $\dot{y}(t_1) = -\omega_n (y_0 - f_d)\sin(\omega_n t_1) = 0$

$$\sin(\omega_n t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \pi / \omega_n$$

solução acima é valida para: $0 \le t \le t_1 = \pi / \omega_n$

$$t_1 = \pi / \omega_n \quad \Rightarrow \quad y(t_1) = f_d + (y_0 - f_d)\cos(\pi) = 2 f_d - y_0$$

ATRITO COULOMBIANO

sistema massa-mola com atrito coulombiano

velocidade passa a ser positiva: $\ddot{y} + \omega_n^2 y = -\omega_n^2 f_d$

solução homogênea: $y_h(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$

solução particular: $y_p(t) = -f_d$

solução geral: $y(t) = -f_d + C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$

$$\begin{aligned} y(t_1) &= 2f_d - y_0 \\ \dot{y}(t_1) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -C_1 - f_d &= 2f_d - y_0 \\ \omega_n C_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= y_0 - 3f_d \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

ATRITO COULOMBIANO

sistema massa-mola com atrito coulombiano

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = -\omega_n^2 f_d \;\Rightarrow\; \begin{aligned} y(t) &= -f_d + (y_0 - 3f_d)\cos(\omega_n t) \\ \dot{y}(t) &= -\omega_n (y_0 - 3f_d)\sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

a solução acima é valida para: $\dot{y} > 0$

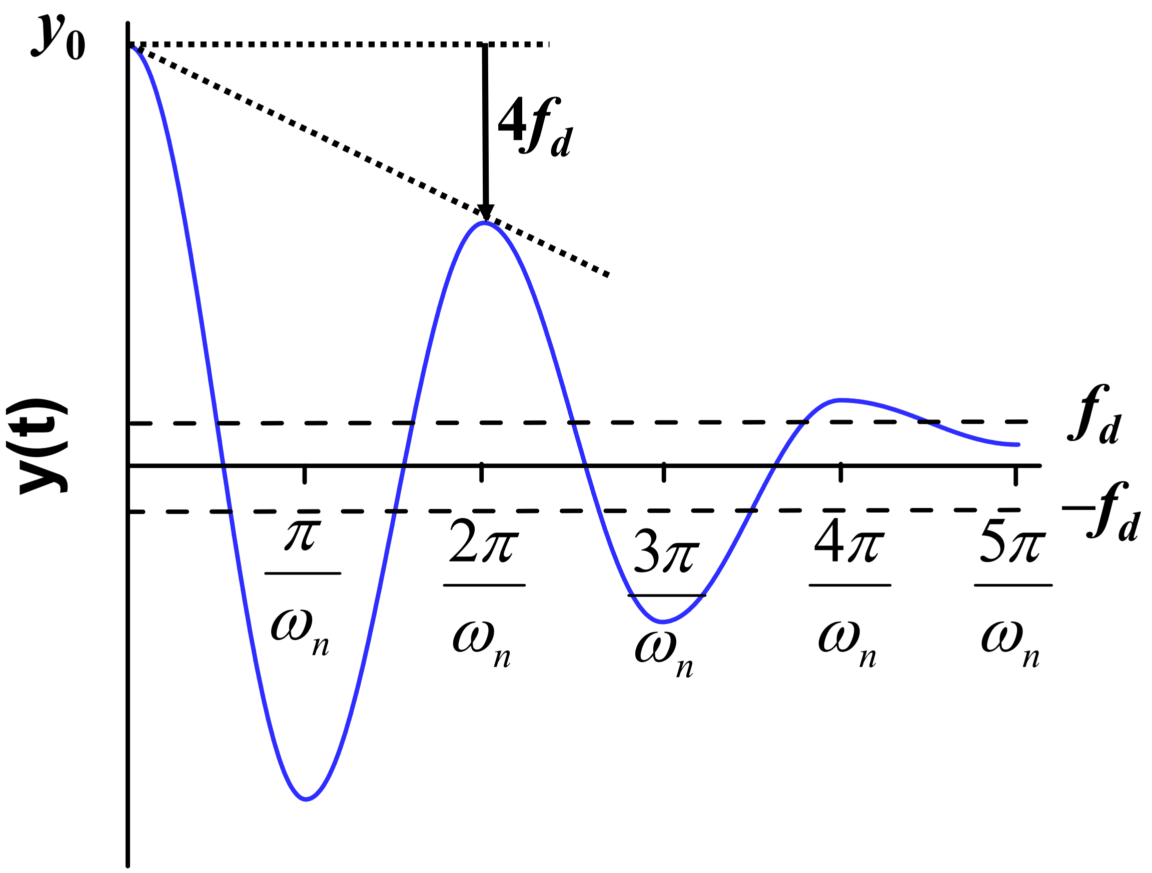
limite de validade: $\dot{y}(t_2) = -\omega_n (y_0 - 3f_d)\sin(\omega_n t_2) = 0$

$$\sin(\omega_n t_2) = 0 \;\Rightarrow\; t_2 = 2\pi / \omega_\mathrm{n}$$

solução acima é valida para: $t_1 = \pi / \omega_n \le t \le t_2 = 2\pi / \omega_n$

$$t_2 = 2\pi / \omega_\mathrm{n} \;\Rightarrow\; y(t_2) = -f_d + (y_0 - 3f_d)\cos(2\pi) = y_0 - 4f_d$$

ATRITO COULOMBIANO



ATRITO COULOMBIANO

sistema massa-mola com atrito coulombiano

- a amplitude do movimento se reduz de $4f_d$ a cada ciclo
- o decaimento é linear e não exponencial como no atrito viscoso
- a posição final da massa corresponde ao primeiro ponto em que a velocidade é nula e $|y| < f_d$ porque, nesse caso, a força restauradora kf_d é menor que a força de atrito