VIBRAÇÕES MECÂNICAS

SISTEMAS CONTÍNUOS: SOLUÇÕES APROXIMADAS

Sistemas contínuos: soluções aproximadas

Introdução

Na prática, sistemas contínuos não admitem solução analítica devido à não-uniformidade na distribuição de massa e rigidez.

Sistemas contínuos são então aproximados por sistemas discretos.

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh

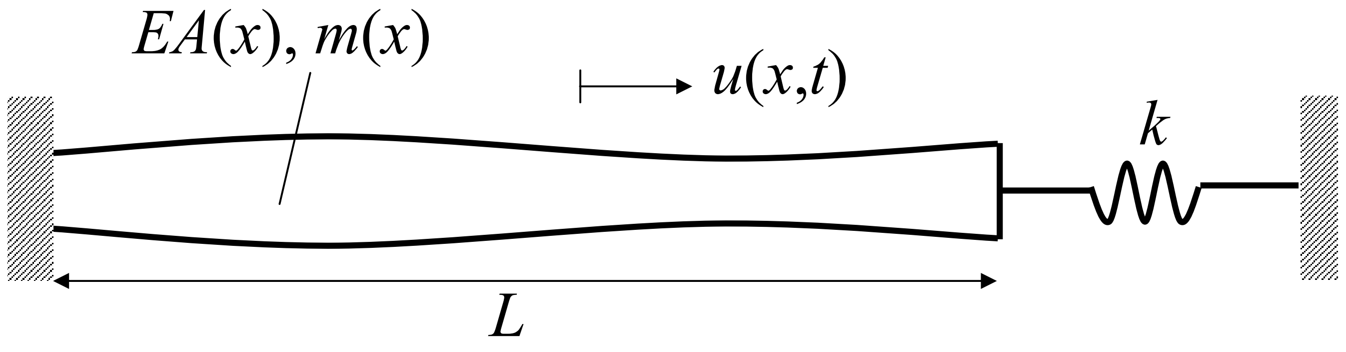
A freqüência fundamental de vibração estimada para um sistema conservativo tem um valor estacionário na vizinhança do modo fundamental.

$$\omega^2 = \frac{\{u\}^T [k] \{u\}}{\{u\}^T [m] \{u\}}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas

Método de Rayleigh

Vibração axial de uma barra



$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=m(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$u(x,t)=U(x)F(t)$$

$$-\frac{d}{dx}\left[EA(x)\frac{dU(x)}{dx}\right]=\omega^2 m(x)U(x)$$

$$U(0)=0 \qquad EA(x)\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L}=-kU(L)$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh

Vibração axial de uma barra

$$-\frac{d}{dx}\left[EA(x)\frac{dU_j(x)}{dx}\right]=\omega_j^2 m(x)U_j(x)$$

$$-\int_0^L U_i(x)\frac{d}{dx}\left[EA(x)\frac{dU_j(x)}{dx}\right]dx=\omega_j^2\int_0^L m(x)U_i(x)U_j(x)dx$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh

Integração por partes

$$\omega_j^2 \int_0^L m(x) U_i(x) U_j(x) dx = -\int_0^L U_i(x) \frac{d}{dx}\left[EA(x) \frac{dU_j(x)}{dx} \right] dx =$$

$$\int_0^L EA(x) \frac{dU_i(x)}{dx} \frac{dU_j(x)}{dx} dx - \left[EA(x) U_i(x) \frac{dU_j(x)}{dx} \right]_0^L$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh

Aplicação das condições de contorno

$$\omega_j^2 = \frac{kU_i(L)U_j(L) + \int_0^L EA(x)\frac{dU_i(x)}{dx}\frac{dU_j(x)}{dx}dx}{\int_0^L m(x)U_i(x)U_j(x)dx}$$

$$\omega^2 = R(U) = \frac{kU^2(L) + \int_0^L EA(x)\frac{dU(x)}{dx}\frac{dU(x)}{dx}dx}{\int_0^L m(x)U(x)U(x)dx}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh

Escolher funções teste $U(x)$ de tal forma a obter uma estimativa de ω_1.

$$\omega^2 = R(U) = \frac{kU^2(L) + \int_0^L EA(x)\frac{dU(x)}{dx}\frac{dU(x)}{dx}dx}{\int_0^L m(x)U(x)U(x)dx}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh

Pelo método de Rayleigh obtém-se apenas uma aproximação muito imprecisa somente da freqüência fundamental.

Duas formas do quociente de Rayleigh:

1) funções teste $U(x)$ escolhidas devem satisfazer *somente* as condições de contorno geométricas do sistema.

2) Uma vez que as condições de contorno não foram explicitamente impostas, as funções teste $U(x)$ escolhidas devem satisfazer *todas* essas condições de contorno do sistema (geométricas e naturais)

Sistemas contínuos: soluções aproximadas

Método de Rayleigh

Forma 1

$$R(U)=\frac{kU^2(L)+\int_0^L EA(x)\frac{dU(x)}{dx}\frac{dU(x)}{dx}dx}{\int_0^L m(x)U(x)U(x)dx}$$

Forma 2

$$R(U)=\frac{\int_0^L -U(x)\frac{d}{dx}\left[EA(x)\frac{dU(x)}{dx}\right]dx}{\int_0^L m(x)U(x)U(x)dx}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh: exemplo

Primeira freqüência natural de uma barra não uniforme fixada em $x = 0$ e livre em $x = L$.

$$m(x) = \frac{6}{5} m \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad EA(x) = \frac{6}{5} EA \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad U(x) = \sin(\pi x / 2L)$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^2 EA \int_0^L \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \cos^2(\pi x / 2L) dx}{4mL^2 \int_0^L \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \sin^2(\pi x / 2L) dx} = 3.1504 \frac{EA}{mL^2}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Todas as freqüências naturais são pontos estacionários do quociente de Rayleigh. Assim, extremização desse quociente deve levar às freqüências naturais.

Logo, para se resolver numericamente o problema de auto-valor pode-se: (i) trabalhar com funções teste e a equação diferencial ou (ii) trabalhar com funções teste e o quociente de Rayleigh.

Sistemas contínuos: soluções aproximadas

Método de Rayleigh-Ritz

Considere a forma 1 do quociente de Rayleigh e escreva uma solução aproximada do problema de auto-valor como sendo:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x)$$

onde a_i são coeficientes a serem determinados e $\phi_i(x)$ são funções teste que devem satisfazer somente as condições geométricas.

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Condição de estacionariedade

$$R(\{u\}) = \frac{\{u\}^T [k] \{u\}}{\{u\}^T [m] \{u\}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \omega_i^2}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$$

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{n} c_i \{u\}_i$$

$$\lambda_i = \omega_i^2$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Assumir $\{u\}$ ligeiramente diferente de $\{u\}_r$

$$\{u\}=\sum_{i=1}^{r-1} c_i \{u\}_i + c_r \{u\}_r + \sum_{i=r+1}^{n} c_i \{u\}_i$$

$$c_i = \varepsilon_i c_r$$

pequeno ε_i

$$R(\{u\})=\frac{\sum_{i=1}^{r-1}\varepsilon_i^2 c_r^2 \lambda_i + c_r^2 \lambda_r + \sum_{i=r+1}^{n}\varepsilon_i^2 c_r^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{r-1}\varepsilon_i^2 c_r^2 + c_r^2 + \sum_{i=r+1}^{n}\varepsilon_i^2 c_r^2}=\frac{\sum_{i=1}^{r-1}\varepsilon_i^2 \lambda_i + \lambda_r + \sum_{i=r+1}^{n}\varepsilon_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{r-1}\varepsilon_i^2 + 1 + \sum_{i=r+1}^{n}\varepsilon_i^2}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Expansão por série de Taylor em torno de $\varepsilon_i = 0$

$$R(\{u\}) = \frac{\sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon_i^2 \lambda_i + \lambda_r + \sum_{i=r+1}^{n} \varepsilon_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon_i^2 + 1 + \sum_{i=r+1}^{n} \varepsilon_i^2} \approx \lambda_r + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_r) \varepsilon_i^2$$

Perturbações de primeira ordem em $\{u\}$ levam a perturbações de segunda ordem em $R(\{u\})$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Condição de estacionariedade

$$\frac{\partial R}{\partial a_1}=\frac{\partial R}{\partial a_2}=\ldots=\frac{\partial R}{\partial a_n}=0$$

$$R=\frac{N}{D} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial a_r}=\frac{D\left(\dfrac{\partial N}{\partial a_r}\right)-N\left(\dfrac{\partial D}{\partial a_r}\right)}{D^2}=0$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Se Λ for o valor estacionário do coeficiente de Rayleight então:

$$\frac{\partial N}{\partial a_r} - \Lambda \frac{\partial D}{\partial a_r} = 0$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

N **e** ***D*** **são funções quadráticas e simétricas em relação a** ***u*****. Logo,**

$$N = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij} a_i a_j \qquad D = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} a_i a_j$$

$$k_{ij} = k_{ji} \qquad m_{ij} = m_{ji}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

$$\frac{\partial N}{\partial a_r} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\left(\frac{\partial a_i}{\partial a_r} a_j + a_i \frac{\partial a_j}{\partial a_r}\right) = \sum_{j=1}^{n} k_{rj} a_j + \sum_{i=1}^{n} k_{ir} a_i = 2\sum_{j=1}^{n} k_{rj} a_j$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_r} = 2\sum_{j=1}^{n} m_{rj} a_j$$

$$[k]\{a\} = \Lambda [m]\{a\}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Cálculo dos coeficientes k_{ij} e m_{ij}:

$$N=\int_0^L EA(x)\left[\frac{du(x)}{dx}\right]^2 dx=\int_0^L EA(x)\left[\sum_{i=1}^n a_i\frac{d\phi_i(x)}{dx}\right]\left[\sum_{j=1}^n a_j\frac{d\phi_j(x)}{dx}\right]dx$$

$$N=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i a_j\int_0^L EA(x)\frac{d\phi_i(x)}{dx}\frac{d\phi_j(x)}{dx}dx$$

$$k_{ij}=\int_0^L EA(x)\frac{d\phi_i(x)}{dx}\frac{d\phi_j(x)}{dx}dx$$

$$m_{ij}=\int_0^L m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

A solução de $[k]\{a\}=\Lambda[m]\{a\}$ fornece n autovalores Λ_r e autovetores $\{a\}_r$

Λ_r são aproximações dos autovalores reais do problema e $\{a\}_r$ fornecem aproximações para as autofunções.

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz envolve solução de uma seqüência de problemas fazendo-se $r = 1,2,3,...$ até que uma determinada precisão seja atingida.

Os autovalores computados Λ_r são maiores que os autovalores reais λ_r

A qualidade das aproximações depende de r e da forma das funções teste escolhidas.

Sistemas contínuos: soluções aproximadas

Método de Rayleigh-Ritz

Considere a vibração axial de uma barra fina não uniforme fixada em $x = 0$ e livre em $x = L$ e obtenha estimativas para os autovalores. A rigidez e a massa distribuídas são:

$$EA(x) = \frac{6}{5} EA \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \qquad m(x) = \frac{6}{5} m \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Utilizar as autofunções para a barra uniforme:

$$\phi_i(x) = \sin(2i-1)\frac{\pi x}{2L}$$

$$k_{ij} = \frac{6}{5}EA\frac{(2i-1)\pi}{2L}\frac{(2j-1)\pi}{2L}\int_0^L\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\cos\frac{(2j-1)\pi x}{2L}dx$$

$$m_{ij} = \frac{6}{5}m\int_0^L\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\sin\frac{(2j-1)\pi x}{2L}dx$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Para $n = 1$

$$k_{11} = \frac{EA}{40L}(5\pi^2 + 6) \qquad m_{11} = \frac{1}{10\pi^2} mL(5\pi^2 - 6)$$

$$\Lambda_1 = \frac{k_{11}}{m_{11}} = 3.1504 \frac{EA}{mL^2}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Para $n = 2$

$$[k]=\frac{EA}{40L}\begin{bmatrix} 5\pi^2+6 & 27/2 \\ 27/2 & 45\pi^2+6 \end{bmatrix} \qquad [m]=\frac{mL}{10\pi^2}\begin{bmatrix} 5\pi^2-6 & 7.5 \\ 7.5 & 5\pi^2-2/3 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1=3.1482\frac{EA}{mL^2} \qquad \{a\}_1=\begin{Bmatrix} 0.9999 \\ -0.0101 \end{Bmatrix}$$

$$\Lambda_2=23.2840\frac{EA}{mL^2} \qquad \{a\}_2=\begin{Bmatrix} -0.1598 \\ 0.9871 \end{Bmatrix}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

Para $n = 3$

$$\Lambda_1 = 3.1480 \frac{EA}{mL^2} \qquad \{a\}_1^T = \{0.9999 \quad -0.0105 \quad 0.0019\}$$

$$\Lambda_2 = 23.2532 \frac{EA}{mL^2} \qquad \{a\}_2^T = \{-0.1610 \quad 0.9866 \quad -0.0275\}$$

$$\Lambda_3 = 62.9118 \frac{EA}{mL^2} \qquad \{a\}_3^T = \{0.0674 \quad -0.1131 \quad 0.9913\}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de Rayleigh-Ritz

As aproximações se tornam melhores à medida que n cresce.

As autofunções são obtidas através dos vetores $\{a\}$.

Como regra geral deve-se usar pelo menos duas vezes mais funções teste que o número de autovalores a serem obtidos com precisão.

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de modos assumidos

Método que leva a resultados semelhantes ao método de Rayleigh-Ritz.

Solução através das equações de Lagrange.

Equação dinâmica obtida.

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de modos assumidos

Solução da forma:

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)q_i(t)$$

Energia cinética e potencial:

$$T(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t)$$

$$V(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}q_i(t)q_j(t)$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de modos assumidos

As condições de contorno naturais são levadas em conta nas expressões da energia cinética e da energia potencial. Assim, as funções teste têm que satisfazer apenas as condições de contorno geométricas.

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de modos assumidos

Equação de Lagrange para sistemas conservativos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}+\frac{\partial V}{\partial q_r}=0$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_{rj}\ddot{q}_j(t)+\sum_{j=1}^{n} k_{rj}q_j(t)=0 \quad \Rightarrow \quad [m]\{\ddot{q}(t)\}+[k]\{q(t)\}=\{0\}$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de modos assumidos

Soluções síncronas:

$$\{q(t)\}=\{a\}\cos(\omega t-\phi)$$

$$[k]\{a\}=\Lambda[m]\{a\}$$

Mesmo resultado obtido via Rayleigh-Ritz

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de modos assumidos

Resposta dinâmica para um sistema com forças não conservativas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r$$

onde Q_r são forças não conservativas.

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de modos assumidos

Trabalho virtual das forças não conservativas:

$$\delta\overline{W}=\int_0^L\left[f(x,t)+\sum_{j=1}^{l}F_j(t)\delta(x-x_j)\right]\delta u(x,t)dx=$$

$$\int_0^L\left[f(x,t)+\sum_{j=1}^{l}F_j(t)\delta(x-x_j)\right]\sum_{r=1}^{n}\phi_r(x)\delta q_r(t)dx=$$

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\int_0^L f(x,t)\phi_r(x)dx+\sum_{j=1}^{l}F_j(t)\phi_r(x_j)\right]\delta q_r(t)=\sum_{r=1}^{n}Q_r(t)\delta q_r(t)$$

Sistemas contínuos: soluções aproximadas
Método de modos assumidos

Equação dinâmica:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\}+[k]\{q(t)\}=\{Q(t)\}$$

Métodos de solução:

Análise modal

Integração numérica direta (Wilson-θ, Newmark)